

## Holografía y matemática

RODRIGO GONZÁLEZ GONZÁLEZ<sup>1</sup>, AMY GABRIELA GONZÁLEZ VALENZUELA<sup>2</sup>

### RESUMEN

***El objetivo general de este escrito es analizar matemáticamente el proceso físico de reproducción de un holograma de transmisión, con el fin de contrastar resultados directamente observables respecto a aproximaciones obtenidas de forma teórica. Por una parte, al observar un holograma se localiza sobre este una región en la que se reproduce fielmente un objeto tridimensional impreso con una técnica fotográfica especial llamada holografía. Por otra parte, al aplicar un modelo matemático simple para describir este hecho, por medio de la conocida ecuación de onda clásica —con solución dada en forma de Kirchhoff, la cual se analiza con un método asintótico de análisis complejo— se obtiene un resultado aproximado que permite realizar una conclusión congruente sobre este proceso particular.***

***Palabras clave:*** Holograma, luz láser, ecuación de onda, solución de Kirchhoff, fase estacionaria.

<sup>1</sup>Ph.D (Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics), Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México, [rodrigo.gonzalez@unison.mx](mailto:rodrigo.gonzalez@unison.mx), <https://orcid.org/0000-0002-1178-0562>

<sup>2</sup>Est. M.C.F. (Maestría en Ciencias Físicas), Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México, [a220206005@unison.mx](mailto:a220206005@unison.mx), <https://orcid.org/0009-0007-6951-6661>

Autor de Correspondencia: Rodrigo González González, [rodrigo.gonzalez@unison.mx](mailto:rodrigo.gonzalez@unison.mx)

Recibido: 21 / 03 / 2024

Aceptado: 03 / 01 / 2025

Publicado: 06 / 02 / 2025

### Cómo citar este artículo:

Gonzalez Gonzalez, R., & González Valenzuela, A. G. (2024). Holografía y Matemática. *EPISTEMUS*, 18(37), e3709367. <https://doi.org/10.36790/epistemus.v18i37.367>

## Holography and Mathematics

### ABSTRACT

*The general objective of this paper is to analyze mathematically the physical process of reproduction of a transmission hologram, in order to contrast directly observable results with approximations obtained theoretically. On one hand, when observing a hologram, a region is located on it where a three-dimensional object is faithfully reproduced using a special photographic technique called holography. On the other hand, by applying a simple mathematical model to describe this fact, through the well-known classical wave equation—with a solution given in Kirchhoff form, which is analyzed using an asymptotic method of complex analysis—an approximate result is obtained that allows for a congruent conclusion about this particular process.*

**Key words:** Hologram, laser light, wave equation, Kirchhoff solution, stationary phase.





## Introducción

La holografía, o visión gráfica real, es un proceso de impresión especial con el que es posible generar imágenes ópticas tridimensionales de objetos físicos, grabadas por medio de luz láser sobre emulsiones sensibles, que reciben el nombre de *hologramas*. En la impresión de un holograma se graban con alto grado de exactitud las características visibles de algún objeto real sobre una placa o película fotosensible (emulsión) mediante un proceso de interferencia con ondas de luz planas y un montaje óptico con espejos y lentes.

La tecnología involucrada en la realización de hologramas no solo es sofisticada por el equipo que se utiliza, sino por el dominio, conocimiento y experiencia necesarios en física, matemáticas e ingeniería. Debido al proceso y herramientas requeridos, los hologramas son difíciles de falsificar; por ello, son utilizados para evitar fraudes o adulteraciones en un gran número de aplicaciones. La holografía también está presente en actividades artísticas, decorativas, promocionales, entre otras. De hecho, se dice que los hologramas son un símbolo de originalidad y seguridad.

Esencialmente, existen dos tipos de hologramas: de *transmisión*, visibles en la película grabada al ser iluminados del lado opuesto a la observación, y de *reflexión*, que se reproducen con luz que proviene del mismo lado del observador. La imagen impresa, procesada e iluminada de forma adecuada, se reproduce con diferente perspectiva según sea la posición del espectador. La imagen observada conserva casi por completo las características externas del objeto "fotografiado" y a veces se sale del marco límite del holograma de una forma espectacular. En concreto, los hologramas guardan y reproducen de forma auténtica e impresionante la apariencia de configuraciones tridimensionales.



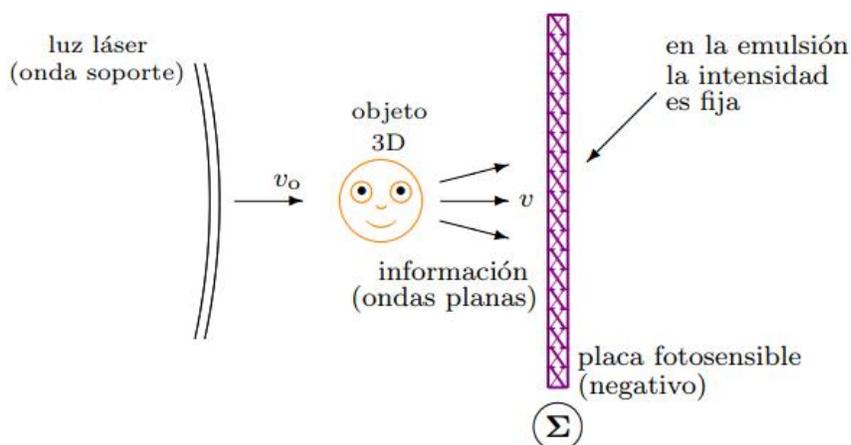
Los hologramas se pueden imprimir sobre diversos tipos de materiales, tales como películas delgadas, fotopolímeros, cristales, gelatinas dicromadas, telas poliéster, entre otros, con resultados tan hermosos y asombrosos que cuando se observan es difícil resistir la tentación de tocarlos. En particular, la matemática involucrada que permite llegar a una conclusión significativa del proceso holográfico básicamente es la aplicación de ecuaciones diferenciales parciales, métodos analíticos de integración y, en específico, conceptos y resultados de análisis complejo, lo cual tratamos de mostrar de la forma más simple posible en este escrito.

## Física del problema

La elaboración de un holograma es compleja, por lo que, en general, en este escrito solo se presentan los aspectos más importantes de la etapa de producción y la atención se enfoca principalmente en la fase de reproducción de hologramas de transmisión. El planteamiento y desarrollo del problema consiste básicamente de tres etapas principales, que se describen a continuación.

**a) Producción del holograma.** En la Figura 1 se bosquejan los elementos básicos presentes en la etapa de elaboración.





**Figura 1. Proceso holográfico simple (sin lente).**

En esta simplificación se consideran los puntos siguientes:

- La fuente soporte (el láser) es luz monocromática, lo cual implica que

$$\begin{aligned} u_0(t, \mathbf{x}) &= e^{-i\omega t} v_0(\mathbf{x}) \\ u(t, \mathbf{x}) &= e^{-i\omega t} v(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $v_0(\mathbf{x})$  es el campo direccional del láser y  $v(\mathbf{x})$  es la señal con la información del objeto tridimensional alrededor del cual pasa el láser. Las funciones  $u_0(t, \mathbf{x})$  y  $u(t, \mathbf{x})$  son soluciones con la misma frecuencia  $\omega$  de la ecuación de onda clásica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u \quad (2)$$

que la transforman en la ecuación de Helmholtz,

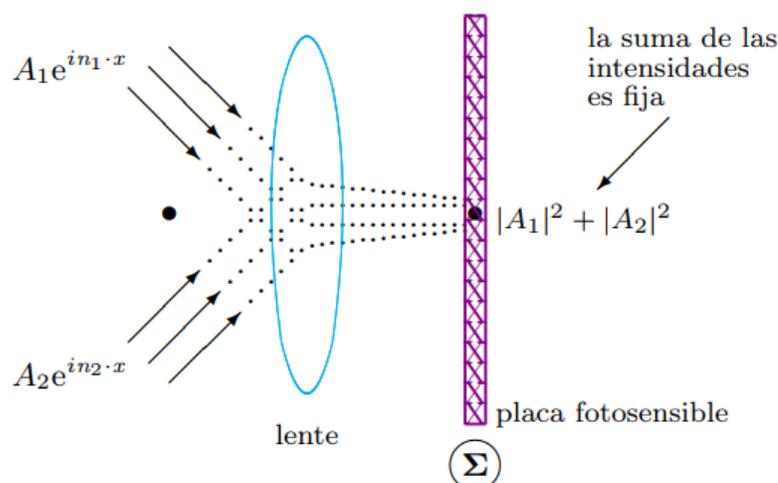
$$(\Delta + k^2)v = 0, \quad (3)$$

donde  $k = \omega/\alpha$  es el número de onda.

- La onda soporte (luz láser) es una onda plana. Esto es,  $v_0(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}$ ,  $\|\mathbf{n}_0\| = 1$  donde  $\mathbf{n}_0$  es la dirección de la onda láser y la onda señal  $v(\mathbf{x})$ , que contiene la información del objeto, también es una onda plana.

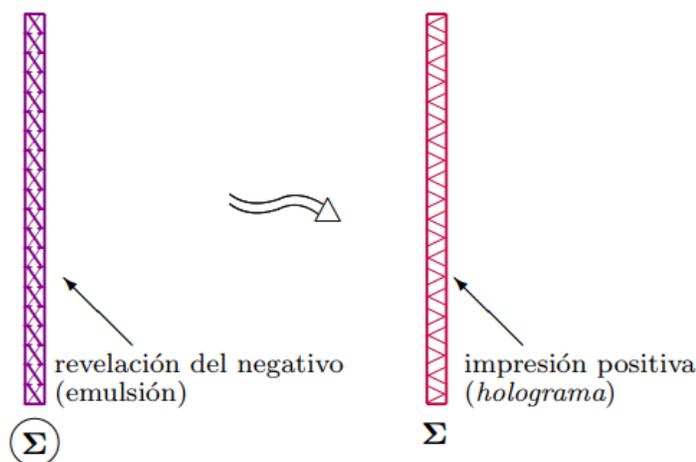
- Sin lente, la intensidad de la onda mezclada se fija directamente. En este caso,  $c|v + v_0|^2$ , con  $c$  una constante de proporcionalidad.

La elaboración puede hacerse lo suficientemente sofisticada, al usar montajes con lente, cuya diferencia principal, en tal caso, es la intensidad de la onda mezclada que incide sobre la placa fotosensible (en la Figura 2 se ilustra de forma simple este caso).



**Figura 2. Proceso holográfico usual (con montaje).**

**b) Revelación del holograma.** Enseguida, se revela (trabajo en laboratorio) el negativo de la información transmitida del objeto (Figura 3).

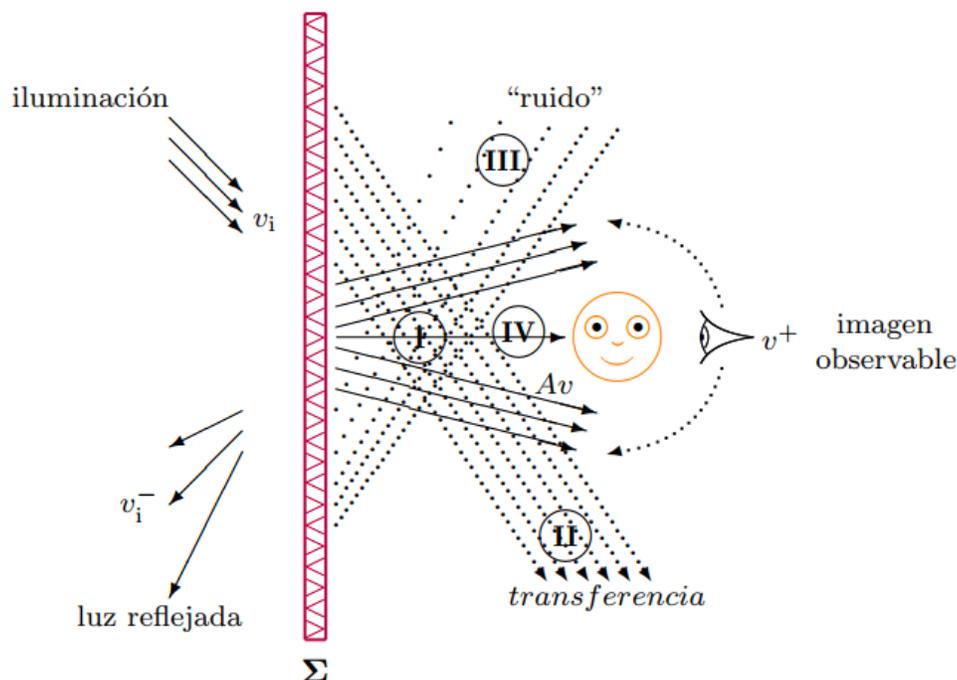


**Figura 3. Impresión del holograma.**





c) **Reproducción del holograma.** Por último, sigue la observación, sin duda la etapa más interesante y excitante. En la Figura 4 se bosqueja el proceso de transmisión.



**Figura 4. Reproducción de un holograma por transmisión.**

De forma tangible, en la zona de reproducción se tienen las siguientes regiones principales de observación (Figura 4):

- I. Zona caótica.
- II. Zona de transferencia.
- III. Zona de ruido.
- IV. Zona observable.

El fenómeno físico (experimentalmente observado en el holograma elaborado) que se tiene para la onda transmitida,  $v^+$ , se describe por

$$v^+ = Av + A_0 v_0 + w, \quad (4)$$



donde  $A$  y  $A_0$  son coeficientes de transmisividad que dependen del tipo de película utilizada para la elaboración del holograma y  $w$  representa el ruido de fondo. Esto es, de forma heurística, se tiene el siguiente resultado notable y fundamental.

**Resultado I.** *En la zona de reproducción existen tres tipos de onda, que se separan en sus respectivas direcciones, donde solo una de estas es la observablemente importante.*

## Modelo matemático

Para el modelo matemático aplicado, el holograma se considera como una pantalla o superficie de integración apropiada. La difracción de la onda señal de referencia  $v$  sobre esta superficie se describe por el coeficiente de transmisividad (o coeficiente de reflexión, respectivamente).

En la fórmula de Kirchhoff, debida al físico prusiano Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), el plano hipotético  $\Sigma$  se considera primeramente como una pantalla absolutamente transparente [1]. Es decir,

$$v^+(\mathbf{x}) = \Gamma_{\Sigma}(v, dS), \quad (5)$$

donde

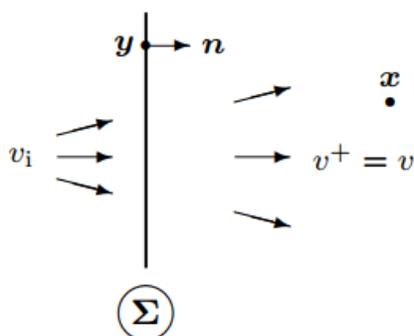
$$\Gamma_{\Sigma}(v, dS) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \frac{\partial G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \right] dS(\mathbf{y}), \quad (6)$$

con  $G_k$  la solución fundamental o función de Green de la ecuación de Helmholtz

$$G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = - \frac{e^{ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (7)$$

En este caso, la onda señal se transmite directamente (Figura 5),





**Figura 5. Observación directa de la onda señal.**

Ahora, si la superficie  $\Sigma$  no es absolutamente transparente, entonces la difracción sobre la emulsión se describe por

$$v^+ = \Gamma_{\Sigma}(v, \sigma dS), \quad (8)$$

donde  $\sigma = \sigma(\mathbf{y})$  es un coeficiente de transmisión, con  $0 \leq \sigma(\mathbf{y}) \leq 1$ , de forma que  $\sigma(\mathbf{y}) = 1$  corresponde a lugares absolutamente transparentes sobre  $\Sigma$ , mientras que  $\sigma(\mathbf{y}) = 0$  corresponde a lugares absolutamente opacos sobre  $\Sigma$ .

La expresión (8) se conoce como primer axioma de la holografía [2], [3]. El segundo axioma de la holografía se refiere a lo siguiente: después de hacer la impresión positiva del holograma, *el coeficiente de transmisión obtenido sobre la pantalla es proporcional a la intensidad de la onda mezclada que incide sobre esta*. En el caso más simple, la onda mezclada que incide sobre la emulsión es proporcional a la magnitud al cuadrado de ambas señales,  $v + v_0$  y, por lo tanto,

$$\sigma(\mathbf{y}) = c |v(\mathbf{y}) + v_0(\mathbf{y})|^2, \quad \mathbf{y} \in \Sigma, \quad (9)$$

donde  $c$  es la constante de proporcionalidad de la incidencia de las dos ondas sobre la emulsión.

Los axiomas (8) y (9) proporcionan la fórmula para  $v^+$ , la onda transmitida que pasa a través del holograma. Esto es,

$$\begin{aligned}
 v^+ &= c \Gamma_{\Sigma}(v, |v + v_0|^2 dS) \\
 &= c \Gamma_{\Sigma}(v, v\bar{v}_0 dS) + c \Gamma_{\Sigma}(v, |v|^2 + |v_0|^2 dS) + c \Gamma_{\Sigma}(v, \bar{v}v_0 dS) \quad (10) \\
 &= v_s^+ + v_0^+ + w,
 \end{aligned}$$

donde  $v_s^+$  (la onda señal impresa),  $v_0^+$  (la onda soporte transmitida) y  $w$  (el ruido presente) son separadas por sus direcciones de propagación. La notación con barra sobre  $v_0$  y  $v$  indica conjugado complejo.

Luego, surge la pregunta de rigor: ¿la onda impresa  $v_s^+$  reproduce exactamente a la onda señal original  $v$ ? A continuación, se presenta la respuesta.

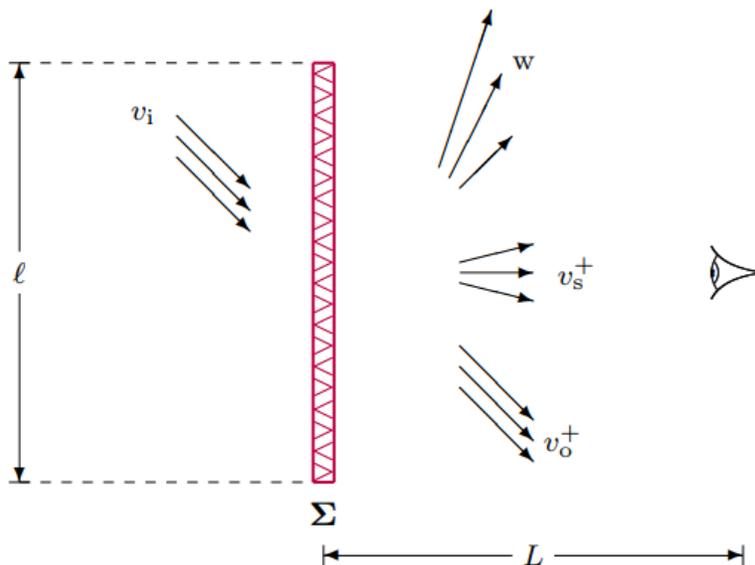
## Aproximación de la solución

La solución se aproxima con el método de ondas cortas, a saber, se supone que la longitud de onda  $\lambda = 1/k$  es mucho menor que el tamaño característico del sistema de referencia.

Es decir, el tamaño de la placa del holograma  $l \gg \lambda$  y la distancia de observación  $L \gg \lambda$ , donde el símbolo “ $\gg$ ” denota mucho mayor que.

La Figura 6 ilustra la comparación del resultado matemático respecto a la física del problema (establecida en el Resultado 1).





**Figura 6. Aproximación matemática de la onda señal reproducida.**

Formalmente, la aproximación por ondas cortas significa tomar  $k$  suficientemente grande en la expresión (10) o equivalentemente,  $k \rightarrow \infty$  y, por consiguiente, se obtiene la aproximación asintótica correspondiente:

$$\Gamma_{\Sigma}(v, \sigma dS) \approx \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma} e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \frac{\partial \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{\partial \mathbf{n}} \frac{v(\mathbf{y})\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} dS(\mathbf{y}). \quad (11)$$

Por lo tanto, como  $\|v_0\| = 1$ , de la expresión (8) se tiene

$$v_s^+ = c \Gamma_{\Sigma}(v, v\bar{v}_0 dS) \approx c \Gamma_{\Sigma}(v, \|v_0\|^2 dS) = cv. \quad (12)$$

Análogamente, si la onda señal es una combinación de ondas planas, que se propagan con diferentes direcciones  $\mathbf{n}_{\alpha}$ ,

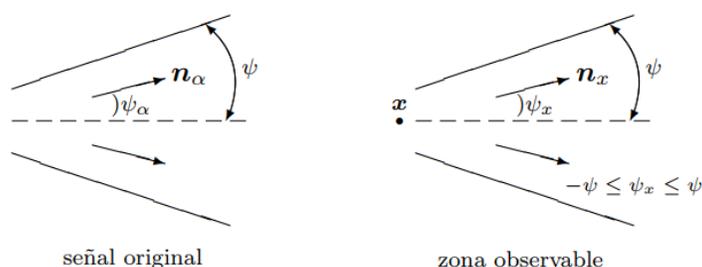
$$v(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} v_{\alpha} e^{ik\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}}, \quad \|\mathbf{n}_{\alpha}\| = 1, \quad (13)$$

por superposición se combinan y se obtiene un resultado similar.

Por otra parte, al utilizar (11) y (13), la porción de la onda soporte que se transmite directamente es

$$\begin{aligned}
 v_0^+ &= c \Gamma_{\Sigma}(v_0, (|v|^2 + |v_0|^2) dS) \\
 &= c \Gamma_{\Sigma}(v_0, dS) + \sum_{\alpha, \beta} \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma} e^{ik(\|x-y\| + (\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_{\alpha} - \mathbf{n}_{\beta}))} A_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (14)
 \end{aligned}$$

donde, a partir del integrando en la fórmula (11), el término  $A_{\alpha, \beta}$  proporciona el efecto en cada dirección de la expansión de ondas planas, llamado espectro angular en las direcciones dadas por  $\mathbf{n}_{\alpha}$  y  $\mathbf{n}_{\beta}$  que conforman la información completa del objeto.



**Figura 7. Efecto y rango observable de la onda señal.**

Al suponer que todos los ángulos de incidencia entre el eje del sistema y las componentes de la onda soporte,  $\mathbf{n}_{\alpha}$ , satisfacen  $-\psi \leq \psi_{\alpha} \leq \psi$  (Figura 7), que la zona observable también está dentro del mismo rango para  $\psi$  y que la onda soporte  $v_0 = e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}$  tiene un ángulo  $\psi_0$  tal que  $\sin \psi_0 > 2 \sin \psi$ , entonces el método de la fase estacionaria implica:

- La integral en (14) no tiene puntos estacionarios, ya que el gradiente de la fase no se anula para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Al aplicar el teorema de la función implícita [4] y [5] y el teorema de cambio de variable [6], para determinar una cota superior de la integral oscilatoria tipo Fourier (14), esta decae cuando  $k \rightarrow \infty$  y, por lo tanto,





$$v_0^+(\mathbf{x}) = cv_0(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(k^{-1}). \quad (15)$$

➤ La integral que representa al ruido,  $w(\mathbf{x})$ , aproximada por

$$\frac{ik}{4\pi} \sum_{\alpha} \int_{\Sigma} e^{ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + (2\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_{\alpha}) \cdot \mathbf{y})} A_{\alpha}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad (16)$$

tampoco tiene puntos estacionarios en el rango considerado, así que  $w(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(k^{-1})$ .

De esta forma, finalmente se puede establecer el resultado más importante, objetivo del presente trabajo, que muestra la congruencia física-matemática para este problema.

**Teorema 1.** *En la zona observable la onda transmitida que pasa a través del holograma es*

$$v^+(\mathbf{x}) = cv(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(k^{-1}). \quad (17)$$

Este resultado significa que existe una zona en la que la señal observada reproduce con precisión la señal original. Es decir, las características externas del objeto tridimensional impresas son conservadas en la zona observable.

**Nota.** Adicionalmente, utilizando la aproximación obtenida, se realizó una animación en PHYTON del proceso de reproducción de un holograma por transmisión para un objeto tridimensional particular, para efectos de mostrar un “holograma sintético digital” como complemento y motivación de una ponencia presentada en un evento académico de matemáticas aplicadas o para participar en futuros eventos académicos o minicursos.

## Conclusiones

Físicamente, al reproducirlo y observarlo, un holograma muestra cuatro regiones principales (descritas en la Figura 4), en las que se tiene lo siguiente: una imagen caótica (deformación total o mezcla de la señal original), una imagen de fondo (contaminación por ruido), un



rastros de la luz original (transmisión directa desde la fuente) y, lo más importante, una copia fiel del objeto analizado (Resultado 1), lo cual se corrobora matemáticamente de forma aproximada con el Teorema 1. Esto es, física y teóricamente existe un lugar en la zona de observación donde se reproducen con precisión las características visibles originales del objeto expuesto en el proceso holográfico por medio del modelo matemático utilizado.

El presente trabajo es un primer paso en la descripción del proceso físico de la *holografía* con un enfoque matemático, con el fin de destacar la importancia de los métodos matemáticos analíticos y la aproximación asintótica en el estudio de ciertos problemas reales. El siguiente paso es analizar el proceso de reproducción de hologramas de reflexión de una forma similar.

En particular, para el caso estudiado, la utilización del *método de la fase estacionaria*, como parte aplicada importante del análisis complejo, establece de forma clara la importancia de estudiar este tipo de problemas analíticamente. En otras palabras, los métodos analíticos son una herramienta fundamental y poderosa para la obtención de resultados y conclusiones de muchos procesos reales de distintas disciplinas.

## Agradecimientos

Una parte significativa de este trabajo corresponde a una tarea pendiente que, como primer autor, decidí realizar para concluir un objetivo planteado en el proyecto de año sabático, aprobado para el periodo 2023-2024 en mi institución de adscripción laboral. Por esta razón agradezco infinitamente a todas las dependencias y personas involucradas de nuestra *alma mater*, la Universidad de Sonora, por la atención y el apoyo brindado durante la realización de esta actividad.





De forma especial, un amplio reconocimiento a Amy Gabriela González V., coautora de este trabajo, por su extraordinaria colaboración en varios aspectos, incluyendo la elaboración de una simulación dinámica animada en PYTHON de este proceso físico esencial y maravilloso para complementar el contenido planteado con el fin de exponer este trabajo en eventos académicos de áreas afines, en cursos de análisis complejo o métodos matemáticos.

## Referencias

- [1] P.R. Garabedian. *Partial Differential Equations*. Chelsea Publishing Co., 1986.
- [2] G. Saxby. *Practical Holography*. Boca Raton, Florida: IoP Publishing, 2004.  
Disponible en <https://doi.org/10.1201/9781420033663>
- [3] H.M. Smith. *Principles of Holography*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1979.
- [4] R. Flores-Espinoza y R. González-González. *Temas y Problemas Selectos de Análisis Matemático. Teoremas de Existencia y Aplicaciones*. Hermosillo, Sonora: Universidad de Sonora, 2022.  
Disponible en <https://doi.org/10.47807/UNISON.95>
- [5] J.E. Marsden. *Elementary Classical Analysis*. San Francisco: W.H Freeman and Company, 1974.
- [6] M.G. García y R. González-González. *Notas de Cálculo Vectorial*. Hermosillo, Sonora: Universidad de Sonora, 2019.  
Disponible en [https://www.mat.uson.mx/sitio/documentos/libros/Notas\\_Calculo\\_Vectorial.pdf](https://www.mat.uson.mx/sitio/documentos/libros/Notas_Calculo_Vectorial.pdf)
- [7] G.B. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, 3.<sup>a</sup> ed. Orlando: Academic Press, 1985.  
Disponible en <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10310-8>
- [8] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics: Vol. II. Partial Differential Equations*. Interscience Publishers, 1965.
- [9] J.W. Dettman. *Applied Complex Variables*. Nueva York: Dover Publications, 1984.
- [10] A. Erdelyi. *Asymptotic Expansions*. Dover Publications, 1956.



- [11] B. Friedman. *Lectures on Applications-Oriented Mathematics*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1991.
- [12] J.P. Keener. *Principles of Applied Mathematics. Transformation and Approximation*. Addison-Wesley, 1988.  
Disponible en <https://doi.org/10.2307/3618500>
- [13] E. Mihaylova. *Holography–Basic Principles and Contemporary Applications*. InTech DTP, 2013.  
Disponible en <http://dx.doi.org/10.5772/46111>
- [14] I. Stakgold. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1979.

**Cómo citar este artículo:**

Gonzalez Gonzalez, R., & González Valenzuela, A. G. (2024). Holografía y Matemática. *EPISTEMUS*, 18(37), e3709367. <https://doi.org/10.36790/epistemus.v18i37.367>

