

# EPISTEMUS

CIENCIA, TECNOLOGÍA Y SALUD

ISSN: 2007-4530

UNIVERSIDAD DE SONORA, JUNIO 2013, NÚMERO 14



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

## Astronomía: planetas, meteoritos, aniversarios, homenaje...

### INVESTIGACIÓN

- Modelo no lineal con potencial Seno-Gordon para un cristal fotónico unidimensional
  - Búsqueda de discos protoplanetarios en cúmulos abiertos jóvenes
  - Materiales ultrablandos: diagrama de fase de una suspensión coloidal de polímeros estrella
- Modelo predictivo de riesgo de morosidad para créditos bancarios usando datos simulados
- Una aproximación al comportamiento de los valores de la vivienda: caso Hermosillo

### DESDE LA ACADEMIA

- El modelo atómico de Bohr: una aplicación
- Armonización de modelos de calidad del software
- Diagnóstico de los instrumentos utilizados para la medición de la presión arterial en los pacientes atendidos en un centro médico
- Diseño de alternativas de conservación de carreteras en el sur del Estado de Sonora
- Método alterno para determinar el costo de producción en líneas de ensamble
  - Elementos para la presentación de las formas diferenciales

### POLÍTICAS DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

- La geometalurgia: una excelente herramienta multidisciplinaria para la vinculación universidad-industria

### CIENCIA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD

- De meteoros y meteoritos
- Usos y ocurrencia de los principales metales que se producen en Sonora
  - Aniversarios astronómicos en Cananea, Sonora
  - El astrónomo

Indexada en:

Redes Regional de Información  
en Ciencias para Promover el Desarrollo  
de América Latina, el Caribe, España y Portugal

latindex

ÍNDICE DE REVISTAS LATINOAMERICANAS EN CIENCIAS PERIÓDICA



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

# Universidad de Sonora

## UNIDAD REGIONAL CENTRO

### DIVISIÓN DE CIENCIAS BIOLÓGICAS Y DE LA SALUD

## Posgrados incluidos en el Padrón Nacional de Posgrados de Calidad de CONACYT

### PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA SALUD ESPECIALIZACIÓN EN INMUNOHEMATOLOGÍA DIAGNÓSTICA

#### Objetivo General

Formar recursos humanos con capacidad para prestar servicios de diagnóstico hematológico e inmunológico, capaces de proponer alternativas para la investigación de problemas de diagnóstico así como para transmitir sus conocimientos mediante actividades docentes y de difusión de información científica.

### MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA SALUD

#### Objetivo General

Formar recursos humanos con capacidad para realizar investigaciones de alto nivel en el campo de la salud y para transmitir sus conocimientos mediante actividades docentes y de difusión de resultados, con el interés de que su formación tenga un impacto decisivo en el perfil epidemiológico poblacional.

### DOCTORADO EN CIENCIAS (QUÍMICO BIOLÓGICAS Y DE LA SALUD)

#### Objetivo General

Formar personal altamente calificado en las áreas de química, biología y ciencias de la salud, con una visión interdisciplinaria, que contribuya a solventar la problemática de salud.

### PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DE LOS ALIMENTOS (CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE GRANOS; CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE PRODUCTOS MARINOS)

#### Objetivo General

Formación de personal calificado y competente de alto nivel que sea capaz de resolver problemas alimentarios en los sectores de investigación, educación, de los sectores público y privado, vinculados con el manejo, almacenamiento, conservación y procesamiento de granos o productos marinos.

### PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LOS ALIMENTOS (CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE GRANOS; CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE PRODUCTOS MARINOS)

#### Objetivo General

Formación de personal de alto nivel académico que sea capaz de generar conocimiento, a través del planteamiento, diseño y desarrollo de proyectos de investigación relevantes al desarrollo de la ciencia de los alimentos y a la resolución de la problemática de la producción y procesamiento de alimentos

### POSGRADO EN BIOCENCIAS (MAESTRÍA)

#### Objetivo general

Formar recursos humanos con una visión amplia de su área de especialidad y con capacidad de identificar problemas y procesos básicos y aplicados en las diferentes disciplinas de las ciencias biológicas. Tendrá la capacidad de desarrollarse en áreas emergentes de las biociencias, combinando diferentes aproximaciones, conceptualizaciones y niveles jerárquicos de la biología y áreas de especialización del posgrado

### POSGRADO EN BIOCENCIAS (DOCTORADO)

#### Objetivo General

Formar investigadores de alto nivel con una amplia capacidad de realizar investigación independiente, la cual contribuya significativamente a la generación, innovación y adaptación de conocimientos científicos y/o tecnológicos en su área de especialización.

Posgrados no incluidos en el Padrón Nacional de Posgrados de Calidad de CONACYT

### MAESTRÍA EN CIENCIAS AGROPECUARIAS (No incluida en la padrón)

#### Objetivos Generales

1. Formar profesores investigadores con una alta preparación académica y capacidad innovadora, capaces de generar y transmitir el conocimiento científico; aptos para crear y desarrollar proyectos y programas de investigación científica y tecnológica, tendientes a mejorar la productividad agropecuaria nacional.

2.- Preparar personal altamente capacitado para ejercer labores docentes de licenciatura y posgrado en las Instituciones de Educación Superior dedicadas a la generación de conocimientos y tecnología en las áreas de fisiología vegetal, genética y mejoramiento de plantas, manejo de agostaderos, praderas irrigadas, producción de carne y leche, nutrición y reproducción animal.



<http://www.investigacion.uson.mx/programas-posgrado.htm>

UNIVERSIDAD DE SONORA

Rosales y Blvd. Luis, Edificio 5B, Hermosillo, Sonora, México, C.P. 83000, Tel: (662) 259-21-06, 07 y Fax: 259-21-05





# CONTENIDO

**DIRECTORIO** 2

**EDITORIAL** 3

**BASES** 4

## INVESTIGACIÓN



**MODELO NO LINEAL CON POTENCIAL  
SENO-GORDON PARA UN CRISTAL  
FOTÓNICO UNIDIMENSIONAL** 5

MARGARITA FRANCO ORTÍZ, ADALBERTO CORELLA  
MADUENO, JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES, ARNULFO  
CASTELLANOS MORENO, RODRIGO ARTURO ROSAS  
BURGOS



**BÚSQUEDA DE DISCOS PROTOPLANETARIOS  
EN CÚMULOS ABIERTOS JÓVENES** 10

BRENDA PÉREZ RENDÓN, MARÍA EUGENIA CONTRERAS,  
LORENZO OLGUÍN RUÍZ, JESÚS HIGUERA VALDENEBRO



**MATERIALES ULTRABLANDOS: DIAGRAMA  
DE FASE DE UNA SUSPENSIÓN COLOIDAL  
DE POLÍMEROS ESTRELLA** 16

GREGORIO ALEJANDRO VEJAR DELGADO, HERIBERTO  
ACUÑA CAMPA, LAURA L. YEOMANS REYNA



**MODELO PREDICTIVO DE RIESGO DE  
MOROSIDAD PARA CRÉDITOS BANCARIOS  
USANDO DATOS SIMULADOS** 22

CLAUDIO ALFREDO LÓPEZ MIRANDA



**UNA APROXIMACIÓN AL COMPORTAMIENTO  
DE LOS VALORES DE LA VIVIENDA:  
CASO HERMOSILLO** 31

JESÚS QUINTANA PACHECO, ARTURO OJEDA DE LA CRUZ,  
JUAN ARCADIO SAIZ HERNÁNDEZ, ANA CECILIA BORBÓN  
ALMADA, ISRAEL MIRANDA PASOS, JESÚS ALBERTO ESQUER  
ARMIENTA

## DESDE LA ACADEMIA



**EL MODELO ATÓMICO DE BOHR:  
UNA APLICACIÓN** 37

RAÚL GARCÍA-LLAMAS



**ARMONIZACIÓN DE MODELOS  
DE CALIDAD DEL SOFTWARE** 41

GABRIEL ALBERTO GARCÍA MIRELES,  
FÉLIX ÓSCAR GARCÍA RUBIO



**DIAGNÓSTICO DE LOS INSTRUMENTOS  
UTILIZADOS PARA LA MEDICIÓN DE LA  
PRESIÓN ARTERIAL EN LOS PACIENTES  
ATENDIDOS EN UN CENTRO MÉDICO** 47

MIGUEL A. LÓPEZ A, MARTIN CHÁVEZ M,  
LUIS F. ROMERO D, RAMÓN A. LUQUE M.



**DISEÑO DE ALTERNATIVAS DE  
CONSERVACIÓN DE CARRETERAS  
EN EL SUR DEL ESTADO DE SONORA** 53

ELSA ELIZABETH MORALES JOSÉ FRANCISCO GONZALEZ  
OCHOA, ISRAEL MIRANDA PASOS, ANA LILIA LEAL CRUZ



**MÉTODO ALTERNO PARA DETERMINAR  
EL COSTO DE PRODUCCIÓN EN LÍNEAS DE  
ENSAMBLE** 59

JAIME DÍAZ SANTANA



**ELEMENTOS PARA LA PRESENTACIÓN  
DE LAS FORMAS DIFERENCIALES** 64

RAFAEL RAMOS FIGUEROA, CARLOS ROBLES CORBALÁ

## POLÍTICAS EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA



**LA GEOMETALURGIA: UNA EXCELENTE  
HERRAMIENTA MULTIDISCIPLINARIA PARA LA  
VINCULACIÓN UNIVERSIDAD-INDUSTRIA** 73

EFREN PÉREZ SEGURA, JOSÉ CARLOS GASPAS,  
FRANCISCO BROWN

## CTS-EPISTEMUS



**DE METEOROS Y METEORITOS** 77

RICARDO VEGA GRANILLO



**USOS Y OCURRENCIA DE LOS PRINCIPALES  
METALES QUE SE PRODUCEN EN SONORA** 83

EVA LOURDES VEGA GRANILLO,  
ALMA PATRICIA SÁMANO TIRADO



**ANIVERSARIOS ASTRONÓMICOS  
EN CANANEA, SONORA** 90

RAÚL PÉREZ-ENRÍQUEZ



**EL ASTRÓNOMO** 93

RICARDO RODRÍGUEZ MIJANGOS

# EPISTEMUS

## UNIVERSIDAD DE SONORA

EPISTEMUS. Año 7, No. 14, enero - junio 2013, es una publicación semestral arbitrada y es editada por la Universidad de Sonora a través de las Divisiones de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales y Ciencias Biológicas y de la Salud. Blvd. Luis Encinas y Blvd. Rosales s/n, Col. Centro, C.P. 83000, Hermosillo Sonora; Tel. (662) 2592105, (662)2592183 ext. 2650, [www.epistemus.uson.mx](http://www.epistemus.uson.mx), revista.epistemus@correom.uson.mx. Editor ejecutivo: Dr. José Luis Díaz Gómez. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2012-101210334800-102. ISSN: 2007-4530 otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Certificado de Licitud de Título y Contenido: 15747, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Impresa por Color Express de México, S.A. de C.V., 12 de octubre No. 130, Col. San Benito, C.P. 83190, Hermosillo, Sonora; este número se terminó de imprimir el 30 de junio de 2013, con un tiraje de 1000 ejemplares.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la presente publicación siempre y cuando se cite plenamente la fuente.

Información del contacto institucional de la publicación: Universidad de Sonora, Unidad Regional Centro, Blvd. Luis Encinas y Rosales s/n, Col. Centro, C.P. 83000, Hermosillo, Sonora, México. Tel. (662)2592155, correo electrónico: [revista.epistemus@correom.uson.mx](mailto:revista.epistemus@correom.uson.mx), At'n. Dr. José Luis Díaz Gómez, Editor ejecutivo.

EPISTEMUS está Indexada en el Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal (LATINDEX) y en el Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencias.

### REVISTA EPISTEMUS

Universidad de Sonora  
Unidad Regional Centro, Blvd. Luis Encinas y  
Rosales, s/n, Col. Centro, C.P.83000,  
Hermosillo, Sonora, México.  
Teléfono: (662) 2592155.  
Correo: [revista.epistemus@correom.uson.mx](mailto:revista.epistemus@correom.uson.mx)  
Atn. Dr. José Luis Díaz Gómez  
Editor Ejecutivo



## UNIVERSIDAD DE SONORA

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde  
Rector  
Dr. Enrique F. Velázquez Contreras  
Secretario General Académico  
M.C. María Magdalena González Agramón  
Secretaria General Administrativa  
Dra. Arminda Gpe. García de León Peñúñuri  
Vicerrectora de la Unidad Regional Centro  
M.D.O. Manuel Ignacio Guerra Robles  
Director de Vinculación y Difusión

## DIRECCIÓN GENERAL

Dra. Rosa María Montesinos Cisneros  
Dr. Jesús Leobardo Valenzuela García  
Dr. Mario Onofre Cortéz Rocha

## DIRECCIÓN EJECUTIVA

Dr. José Luis Díaz Gómez

## COMITÉ EDITORIAL

M.I. Eva Lourdes Vega Granillo  
Depto. de Geología  
Dr. José Luis Díaz Gómez  
Depto. de Matemáticas  
M.I. Jesús Fernando García Arvizu  
Depto. de Ingeniería Civil y Minas  
Dr. Nun Pitalúa Díaz  
Depto. de Ingeniería Industrial  
Q.B. Francisco Javier Parra Vergara  
Depto. de Investigación y Posgrado en Alimentos  
Universidad de Sonora

## CORRECCIÓN DE ESTILO

M.C. Fermín González Gaxiola  
Depto. de Letras y Lingüística  
Universidad de Sonora

## DISEÑO

L.D.G. José Benito Montaña Dórame

## IMPRESIÓN

COLOR EXPRESS DE MÉXICO, S.A DE C.V.  
12 de Octubre No. 130, C.P.83190,  
Col. San Benito, Hermosillo, Sonora, México.

## PAGINA WEB

<http://www.epistemus.uson.mx>

**E**n este primer semestre de 2013, la H. Junta Universitaria convocó y desarrolló el proceso de designación de Rector para el periodo 2013-2017, el resultado fue designar al Dr. Heriberto Grijalva Monteverde para su segundo periodo como Rector de nuestra máxima casa de estudios, quien tomó posesión y rindió protesta el 16 de junio.

Luego de protestar y recibir el nombramiento de parte del presidente en turno de la Junta Universitaria, Alfonso Rangel Guerra, el rector aseguró que encabezará una administración que busque los consensos para garantizar un clima de estabilidad laboral y su trabajo impulse la construcción de una sociedad con mejor calidad de vida e inclusión social.

Los responsables de edición de la revista Epistemus hacemos llegar nuestra felicitación al Dr. Heriberto Grijalva Monteverde por lo que esperamos será un fructífero segundo periodo como Rector de la Universidad de Sonora.

Por otra parte, también en este semestre se celebraron dos eventos de especial relevancia académica, el Departamento de Física de la División de Ciencias Exactas y Naturales convocó y realizó a nombre de la Universidad de Sonora y en conjunto con los Subsistemas de Educación Media Superior del Estado de Sonora, dependientes de la Secretaría de Educación y Cultura del Gobierno de Sonora, el Primer Congreso Estatal de Ciencias Exactas y Naturales y Encuentro de Enseñanza de las Ciencias, que se realizó del 30 de mayo al 1 de junio de 2013, con el objetivo de compartir experiencias y estrategias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias Exactas y Naturales en los niveles básico, medio superior y superior, así como plantear, analizar y generar acciones de colaboración con los Sistemas de Educación Básica y Media Superior en este rubro. Además, promover la divulgación de trabajos de investigación en ciencias desarrollados en el estado de Sonora en las áreas de Física, Matemáticas y Ciencias Químico Biológicas.

También en el presente semestre el Departamento de Investigación y Posgrado en Alimentos realizó el VIII Congreso del Noroeste y IV Nacional de Ciencias Alimentarias y Biotecnología, en San Carlos Nuevo Guaymas, Sonora, del 27 de febrero al 1 de marzo de 2013, que consistió en varios cursos de actualización y presentación de trabajos de investigación científica en las áreas de las Ciencias Alimentarias y la Biotecnología, contando con la participación de cientos de asistentes de todo el país.

Asimismo, es necesario informar que el Ing. Rafael

Pacheco Rodríguez ha decidido concluir con su valiosa colaboración que abarca desde la creación y mantenimiento de la difusión y divulgación científica que han significado los 13 números en los que participó, que aunado al presente consigue Epistemus, un caluroso agradecimiento y el deseo de que continúe cosechando más logros.

## Contenido

En este número 14 de Epistemus se abordan diversos temas a través de sus secciones de Investigación, Desde la Academia, Políticas de Ciencia y Tecnología, y Ciencia, Tecnología y Sociedad.

En la sección de Investigación se incluye Modelo no lineal con potencial seno-gordon para un cristal fotónico unidimensional. También Búsqueda de discos protoplanetarios en cúmulos abiertos jóvenes; Materiales ultrablandos: diagrama de fase de una suspensión coloidal de polímeros estrella; Modelo predictivo de riesgo de morosidad para créditos bancarios usando datos simulados; y Una aproximación al comportamiento de los valores de la vivienda: caso Hermosillo.

En la sección Desde la Academia se presenta El modelo atómico de Bohr: una aplicación; Armonización de modelos de calidad del software; Diagnóstico de los instrumentos utilizados para la medición de la presión arterial en los pacientes atendidos en un centro médico; Diseño de alternativas de conservación de carreteras en el sur del estado de Sonora; Método alterno para determinar el costo de producción en líneas de ensamble; y Elementos para la presentación de las formas diferenciales.

En la sección Políticas de Ciencia y Tecnología se incluye el trabajo intitulado La geometurgia: una excelente herramienta multidisciplinaria para la vinculación universidad-industria. Este tema toma auge ya que la geometurgia involucra a especialistas en el campo de la geología, la microscopía, la minería y la metalurgia extractiva para optimizar los procesos de explotación y beneficio de los minerales.

En la sección Ciencia, Tecnología y Sociedad están publicándose los artículos: De meteoros y meteoritos; Usos y ocurrencia de los principales metales que se producen en Sonora y una reseña periodística sobre los Aniversarios astronómicos en Cananea, Sonora.



La educación, la ciencia y tecnología son consideradas como pilares fundamentales sobre los que se sustenta el desarrollo de un país; por eso es importante fortalecer el enlace entre los que generan el conocimiento y los beneficiados de ello: la sociedad. Uno de los aspectos que distingue a la Universidad de Sonora es la generación de conocimiento y su impacto en la sociedad. Es así como las Divisiones de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales y Ciencias Biológicas y de la Salud crearon el proyecto editorial Epistemus el cual, constituye un medio de información y comunicación para dar a conocer las investigaciones realizadas o en proceso, las actividades académicas, las reflexiones en torno a la ciencia y tecnología, la cultura científica y la sociedad, proyectos de vinculación y extensión de la cultura y los servicios.

### OBJETIVO

Divulgar el conocimiento que se crea, genera y enseña en la Universidad de Sonora con la finalidad de fortalecer la educación, la cultura científica, tecnológica y de la salud de los diversos sectores de la sociedad.

### ÁREAS GENERALES DE CONOCIMIENTO

- Ingenierías: materiales, metalurgia, civil, minas, industrial, ambiental, hidráulica, sistemas de información, mecatrónica, alimentos, energía, agua, entre otras.
- Ciencias exactas y naturales: geología, física, matemáticas, electrónica y ciencias de la computación.
- Ciencias biológicas y de la salud: investigación en alimentos, desarrollo regional, acuicultura, salud, biología, agricultura, entre otras.

### DIRIGIDA A

Los Sectores relacionados con la educación y la investigación, empresarios, dependencias gubernamentales, estudiantes de nivel medio superior, superior y posgrado, y sociedad en general.

### CONTENIDO DE LA REVISTA

Artículos originales e inéditos de proyectos de investigación, reseñas, ensayos, información sobre ciencia y tecnología, eventos relevantes, convocatorias, noticias sobre educación y cultura.

### ENFOQUE DE LOS ARTÍCULOS

- Los artículos reflejarán lo más trascendente de la producción académica, los proyectos de ciencia, tecnología y sociedad que se realizan en la universidad y en particular en las tres divisiones académicas.
- Los artículos deberán de hacer mención de la trascendencia de lo expuesto, su impacto en la solución de problemáticas específicas de la sociedad, del sector industrial, de la educación, de la cultura, entre otras.
- Se incluirán artículos que integren y reflexionen en torno a la ciencia, la tecnología y la sociedad, que aporten elementos precisos que permitan profundizar en el análisis y proponer esquemas de colaboración entre los que producen el conocimiento y los beneficiarios o usuarios potenciales.
- El lenguaje escrito debe ser de buen nivel, con el rigor científico pero de divulgación, comprensible para un público no especializado de nivel bachillerato, empresarios y profesionistas de otras especialidades.

### ARBITRAJE

La revista es arbitrada en varios niveles. Comprende dos aspectos:

- Arbitraje académico: En todos los casos, los artículos serán arbitrados por pares académicos internos y/o externos a la Universidad de Sonora .

- Arbitraje de divulgación: Se evaluará el lenguaje y el significado de lo expuesto para que no pierda la idea original al tratarlos como artículos de divulgación. Participan en el arbitraje de académicos, expertos en divulgación científica.

\* Se les sugerirán adecuaciones y modificaciones para que sean tomadas en cuenta por los autores. En todos los casos se definirán los tiempos para las correcciones.

### CARACTERÍSTICAS DE LOS ARTÍCULOS

#### Recepción

El artículo deberá ser original e inédito y se hará llegar de manera electrónica al correo: revista.epistemus@correom.uson.mx

El comité editorial hará una primera revisión del artículo, si cumple con el formato de la revista, se enviará al menos a 2 árbitros académicos. Los arbitrajes se enviarán a los autores, quienes reenviarán los artículos corregidos. El comité editorial decidirá qué artículos se publicarán en cada número. Los autores de los artículos aceptados, deberán firmar una carta de cesión de derechos de autor y enviarla por e-mail al comité editorial.

#### Título

Utilizar letra tipo Arial de 12 puntos, negrita espacio sencillo, centrada.

#### Autores, grado académico, afiliación, correo electrónico

Incluir los datos curriculares de los autores, especificando su grado académico, institución para la cual labora y correo electrónico.

Respecto a los autores, el primero será el autor y el resto serán coautores, siendo un máximo de cinco personas.

#### Resumen

Los artículos deberán de contener un resumen con letra cursiva, con un máximo de 200 palabras del total establecido.

#### Contenido

Utilizar letra tipo Arial de 12 puntos, normal, a doble espacio, justificada. La extensión de los artículos será de un máximo de 3,300 palabras incluyendo el texto, figuras y citas bibliográficas, en Word con márgenes de 2.5 cm por lado. Los ensayos, reseñas e información de eventos académicos serán de un máximo de 1,500 palabras. Las ecuaciones deberán estar numeradas consecutivamente entre paréntesis. No incluir notas en pie de página.

#### Secciones

El autor señalará en qué sección de la revista desea se publique su artículo. Cuando la colaboración sea en la modalidad de ensayo, hacer uso de subtítulos que faciliten la lectura del texto.

#### Tablas, fotos, figuras

Incluir fotos y gráficos de buena calidad en jpg o tiff de máxima resolución a 1,200 píxeles.

#### Referencias bibliográficas

El formato de las referencias será de acuerdo a la American Psychological Association (APA) y deberán aparecer citadas en el texto con un número consecutivo entre corchetes.

#### FECHAS DE RECEPCIÓN DE ARTÍCULOS

- Fecha límite de recepción de artículos: 20 de Septiembre de 2013.
- Impresión y distribución: Diciembre de 2013.

**Mayores informes al correo:**

revista.epistemus@correom.uson.mx



## MODELO NO LINEAL CON POTENCIAL SENO-GORDON PARA UN CRISTAL FOTÓNICO UNIDIMENSIONAL

MARGARITA FRANCO ORTÍZ\*, ADALBERTO CORELLA MADUEÑO, JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES, ARNULFO CASTELLANOS MORENO Y RODRIGO ARTURO ROSAS BURGOS

*Se presenta un modelo para un cristal fotónico unidimensional formado por una sucesión de planos constituidos por material no lineal, inmersos en un medio lineal. Se resuelve la ecuación de Schrödinger introduciendo en el hamiltoniano modelo del cristal un potencial no lineal tipo Seno-Gordon. Se obtiene analíticamente una versión generalizada, dependiente de la amplitud de la onda incidente, de la ecuación trascendente que caracteriza al modelo del cristal de Kronig-Penney, de donde se determina la estructura de las bandas de energía del cristal. El modelo puede aplicarse a una versión finita de un cristal fotónico para un número limitado de capas alternadas de material lineal y no lineal para el cual se han calculado la reflectancia como una función de la intensidad de la onda electromagnética, el índice de la banda y el número de períodos. Es posible construir un sistema con estas características alternando capas muy delgadas de material de materia blanda no lineal con capas sólidas más gruesas, con el cual puede diseñarse un dispositivo para controlar la propagación de luz para intervalos de longitudes de onda específicos e intensidades de la luz de la misma señal que se propaga.*

M.C. MARGARITA FRANCO ORTIZ  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Alumna en el Programa de Doctorado en Nanotecnología  
Correo: mfranco@correo.fisica.uson.mx  
DR. ADALBERTO CORELLA MADUEÑO  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: adalberto.corella@correo.fisica.uson.mx  
DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES  
UNAM, Instituto de Física  
Correo: adrian@fisica.unam.mx  
DR. ARNULFO CASTELLANOS MORENO  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: acastell@correo.fisica.uson.mx  
DR. RODRIGO ARTURO ROSAS BURGOS  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: rosas@correo.fisica.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Margarita Franco Ortíz  
Correo electrónico: mfranco@correo.fisica.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 23 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530





## INTRODUCCIÓN

Los cristales fotónicos (CFs) son materiales compuestos, espacialmente periódicos, que pueden exhibir brechas en la banda fotónica (BF) para la propagación de la luz, los cuales han llegado a un estado maduro de desarrollo con sus propiedades ópticas bien conocidas y con muchas posibles aplicaciones (1). La mayor parte de las investigaciones en esta área se refieren a CFs cuyas características están fijas, es decir, una vez que se han fabricado no hay posibilidad de alterar su respuesta óptica. Sin embargo, una tendencia reciente se refiere a CFs activos que por medio de algún agente externo pueden cambiarse sus propiedades ópticas de forma continua y reversiblemente. Esto podría dar lugar a guías de ondas ópticas sintonizables, interruptores, limitadores y polarizadores, redes ópticas reconfigurables, e interconexiones electro-ópticas en la microelectrónica.

Podemos clasificar a los CFs sintonizables de acuerdo a dos grandes categorías: para una de ellas, un agente externo causa cambios estructurales sin alterar las constantes dieléctricas de los materiales constituyentes; en la otra categoría la configuración del CF permanece igual y es una propiedad material del CF la que es afectada por el agente externo. Se ha realizado la sintonización estructural por medio de tensión mecánica aplicada a un ópalo polimérico de esferas a escala nanométrica; aplicando un campo eléctrico a un cristal fotónico sobre un sustrato piezoeléctrico; mediante la incorporación de diodos en una estructura 2D de alambres; y aplicando un campo magnético a partículas magnéticas distribuidas periódicamente (2). Por otro lado, la sintonización a través de la alteración de alguna propiedad del material involucra la incorporación de algún material ferroeléctrico o ferromagnético en el CF para ser sintonizado por un campo eléctrico o magnético externo, respectivamente

(3). En particular, los cristales líquidos (CLs) son materiales electro-ópticos bien establecidos que pueden sintonizarse por medio de la presión, calor y el campo eléctrico o magnético aplicado. Su incorporación dentro de un cristal fotónico es de particular interés por la posibilidad de sintonizar selectivamente brechas BF, como se revisó recientemente (4).

La ecuación Sine Gordon aparece en 1970 como una forma de incluir efectos no lineales en las teorías físicas y su uso se extiende desde la teoría del campo relativista hasta el estudio de la dinámica de las líneas de transmisión. Su interés se centra en la existencia de soluciones llamadas solitones, cuyo nombre obedece a que son ondas que se propagan sin dispersarse. Existen varias formas de obtener la ecuación y entre ellas se pueden mencionar desde modelos de cadenas de osciladores hasta la postulación de una densidad lagrangiana adecuada, tal que por medio de la formulación lagrangiana es posible obtener la ecuación correspondiente. Ésta es una labor altamente técnica que se ubica al margen del propósito de este trabajo. Nuestro objetivo se centra en modelar una estructura periódica capaz de intercalar dos materiales: uno cuya respuesta a la perturbación ondulatoria es lineal y otra de carácter no lineal situada en sitios separados una distancia  $a$ . Este es el papel que juega la función seno y constituye una generalización de otro modelo que hemos estudiado anteriormente.

Los efectos no lineales son muy amplios, pero es posible presentar un ejemplo que muestre la diferencia entre la conducta lineal y la que no lo es. Si enviamos un pulso luminoso a través de un material lineal, la luz se propagará de forma que el pulso se va haciendo cada vez más ancho. En términos técnicos, se dice que es un síntoma de conducta dispersiva. En cambio, en un medio no lineal pueden aparecer varios efectos en el pulso que



se propaga, Puede ser que el pulso se haga más angosto, o bien, que simplemente mantenga su forma.

## ESTRUCTURA DE BANDAS EN EL MODELO DE KRONIG-PENNEY LINEAL

El modelo de Kronig-Penney (KP) es un modelo que describe los estados de energía de un electrón perteneciente a un cristal, para ello se supone que la estructura cristalina configura un potencial periódico de cambios abruptos que, si bien es hipotético, es de gran utilidad para los cálculos.

El modelo KP es una aproximación al comportamiento real de los electrones en el cristal y toma en cuenta la periodicidad de la estructura cristalina de los sólidos; el potencial periódico real debido a los iones en la red cristalina se simplifica del espacio tridimensional (3D) al unidimensional (1D) considerando una sucesión periódica de pozos y barreras rectangulares unidimensionales, donde el centro de cada pozo corresponde a la posición que ocupa cada uno de los iones en la red (Figura 1).

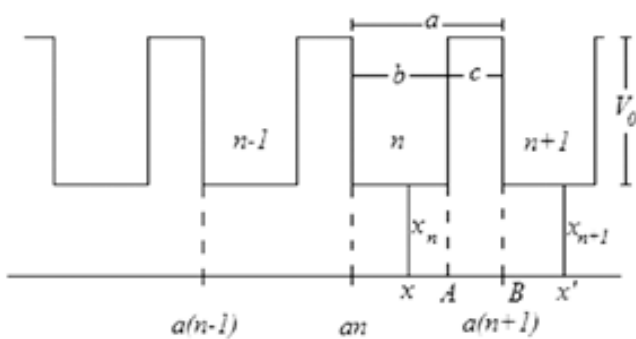


Figura 1. Modelo de cristal unidimensional (1D) infinito de Kronig-Penney.

La posición de un punto  $x$  en el pozo  $n$  es  $x_n$ , medida desde la pared izquierda de este pozo:  $x_n = x - na$ . El punto B tiene la coordenada  $x_n = a$ , que equivale a  $x_{n+1} = 0$ ;  $a$  representa la constante de red del cristal, es la distancia entre una pareja de iones sucesivos en la red.

La ecuación de Schrödinger correspondiente para este sistema está dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Los potenciales en los pozos son cero  $V(x) = 0$ , y en las barreras es diferente de cero, es decir,  $V(x) = V_0$ .

La función de onda electrónica dentro del pozo  $n$  es:

$$\psi_n = A_n \sin kx_n + B_n \cos kx_n, \quad 0 \leq x_n \leq b \quad (1)$$

y dentro de la barrera  $n$ :

$$\psi_n = A'_n \sinh q(a - x_n) + B'_n \cosh q(a - x_n), \quad b \leq x_n \leq a \quad (2)$$

donde:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{y} \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \quad (3)$$

La función de onda dentro del pozo  $n + 1$ :

$$\psi_{n+1} = A_{n+1} \sin kx_{n+1} + B_{n+1} \cos kx_{n+1}, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq b \quad (4)$$

La función de onda y su derivada deben ser continuas en el punto A ( $x_n = b$ ;  $a - x_n = c$ ):

$$A_n \sin kb + B_n \cos kb = A'_n \sinh qc + B'_n \cosh qc$$

$$k[A_n \cos kb - B_n \sin kb] = -q[A'_n \cosh qc + B'_n \sinh qc] \quad (5)$$

y también en el punto B ( $x_n = a$ ;  $x_{n+1} = 0$ ):

$$B'_n = B_{n+1}$$

$$-qA'_n = kA_{n+1} \quad (6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 6 en las ecuaciones 5 se llega a:

$$A_n \sin kb + B_n \cos kb = -\left(\frac{k}{q}\right) A_{n+1} \sinh qc + B_{n+1} \cosh qc \quad (7)$$

$$A_n \cos kb - B_n \sin kb = A_{n+1} \cosh qc - \left(\frac{q}{k}\right) B_{n+1} \sinh qc$$

Para simplificar la solución del sistema de ecuaciones 7 pasamos al límite  $V_0 \rightarrow \infty$  y simultáneamente las barreras se hacen más y más estrechas,  $c \rightarrow 0$ , de tal manera que el producto  $cV_0$  permanece constante, obtenemos así una sucesión periódica de potenciales delta repulsivos tipo peine de Dirac (la función peine de Dirac  $\delta_T$  es una distribución periódica de deltas de Dirac espaciadas  $T$  y se representa por  $\delta_T = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ , a esta función también se le conoce como tren de impulsos unitarios), para los cuales la ecuación de Schrödinger adopta la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2\lambda}{ma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)\psi = E\psi \quad (8)$$

En este límite las ecuaciones 7 se reducen a:

$$A_n \sin ka + B_n \cos ka = B_{n+1}$$

$$A_n \cos ka - B_n \sin ka = A_{n+1} - \left(\frac{2\lambda}{ka}\right) B_{n+1} \quad (9)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro adimensional real y positivo tal que  $cV_0 = \frac{\hbar^2\lambda}{2m}$ .

Se propone una solución de la forma:

$$A_n = c_1 f^n \quad \text{y} \quad B_n = c_2 f^n \quad (10)$$

Sustituyendo las ecuaciones 10 en las ecuaciones 9 se obtiene:

$$c_1 \sin ka + c_2 (\cos ka - f) = 0$$

$$c_1 (\cos ka - f) - c_2 \left( \sin ka - \frac{2\lambda}{ka} f \right) = 0 \quad (11)$$

Para que existan soluciones con  $c_1, c_2 \neq 0$ , se requiere que el determinante del sistema se anule. Esta

condición conduce a:

$$f^2 - 2f \cos \chi a + 1 = 0 \quad (12)$$

donde:

$$\cos \chi a \equiv \cos ka + \frac{\lambda}{ka} \operatorname{sen} ka \quad (13)$$

Las soluciones de la ecuación 12 son:

$$f = e^{\pm i\chi a} \quad (14)$$

las cuales sustituidas en las ecuaciones 11 dan:

$$c_1 = c_2 \frac{f - \cos ka}{\operatorname{sen} ka} = A \frac{f - \cos ka}{\operatorname{sen} ka}; \quad A = c_2$$

Para electrones desplazándose hacia la derecha se tiene:

$$A_n = A \frac{f - \cos ka}{\operatorname{sen} ka} e^{i\chi na} \quad \text{y} \quad B_n = A e^{i\chi na} \quad (15)$$

La sustitución de estos valores en la ecuación 1 da como resultado una función de onda de Bloch:

$$\psi_n = A e^{i\chi x} u_n \quad (16)$$

con:

$$u_n = \frac{e^{i\chi(a-x_n)} \operatorname{sen} kx_n + e^{-i\chi x_n} \operatorname{sen}(a-x_n)}{\operatorname{sen} ka} \quad (17)$$

Las ondas de Bloch obtenidas son un caso particular del Teorema de Floquet, el cual establece que las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos tienen soluciones de la forma  $e^{\pm i k x} u(x)$  donde  $u(x)$  es una función periódica de  $x$ .

La energía de los electrones queda determinada por el valor de  $\chi$ . Los eigenvalores de la energía se obtienen de la ecuación 13 para  $k$  real (Figura 2). Se debe cumplir que:

$$-1 \leq \cos ka + \frac{\lambda}{ka} \operatorname{sen} ka \leq 1 \quad (18)$$

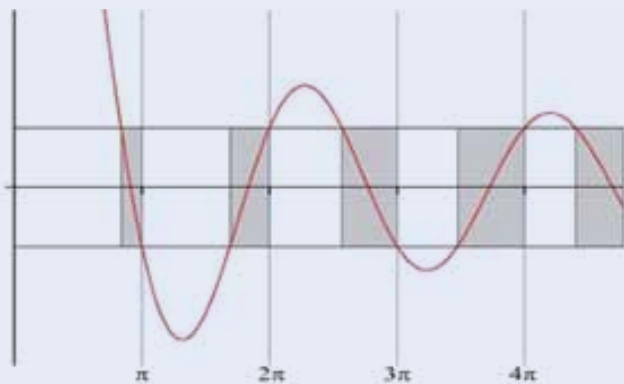


Figura 2. Gráfica de la ecuación 18, mostrando bandas permitidas (sombreadas) separadas por brechas prohibidas.

## ESTRUCTURA DE BANDAS EN EL MODELO DE KRONIG-PENNEY NO LINEAL

Ahora se extenderá el estudio para resolver la ecuación de Schrödinger considerando el caso de un potencial periódico no lineal tipo seno-Gordon; podemos escribir la ecuación de propagación unidimensional como:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi - \left[ \frac{n_2}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \operatorname{Sen} \psi \right] \psi = 0 \quad (19)$$

en donde  $n_2$  es el coeficiente de no linealidad y  $\varphi$  es la amplitud de la onda de propagación. Para puntos  $x \neq na$ , en donde  $n$  es un número entero, la solución general de esta ecuación es de la forma:

$$\psi = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx \quad (20)$$

Después de una integración estándar de la ecuación 19 alrededor de los puntos  $x = na$ , se pueden establecer las condiciones de frontera:

$$e^{-if} \psi(a) = \psi(0) \quad (21)$$

$$e^{-if} \frac{d\psi(a)}{dx} - \frac{d\psi(0)}{dx} = n_2 \operatorname{Sen} \psi(0)$$

en donde el parámetro de Bloch es  $f$ , el cual caracteriza el momento en cada celda unitaria. Después de aplicar estas condiciones a la ecuación 20 y de eliminar la constante  $B$ , se obtiene:

$$\cos f = \cos ka + p \frac{\operatorname{sen} A}{A} \frac{\operatorname{sen} ka}{ka} \quad (22)$$

$$\text{donde } p = \frac{n_2 a}{2}.$$

La ecuación 22 claramente representa una generalización de la ecuación 13 que corresponde al modelo de cristal lineal de Kronig-Penney. En este modelo no lineal, la estructura de bandas depende también de la amplitud de la onda incidente.

## RESULTADOS

En la figura 3 se muestran las bandas permitidas y prohibidas que se han encontrado al resolver la ecuación 22. El eje vertical corresponde al lado derecho de esta ecuación, mientras que el eje horizontal representa a  $ka$ .

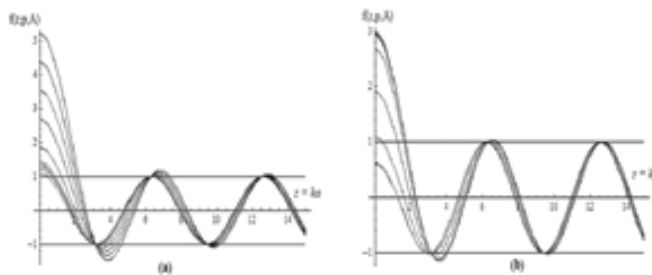


Figura 3. Gráfica de la ecuación 22: (a) Con  $A = 1, p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$ ; (b)  $p = 2, A = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$ .





La figura 4 muestra la estructura de bandas del CF no lineal como una función de las variables independientes  $z = ka$  y  $A$ . La figura 5 exhibe la misma información, pero en una gráfica de superficies de nivel.

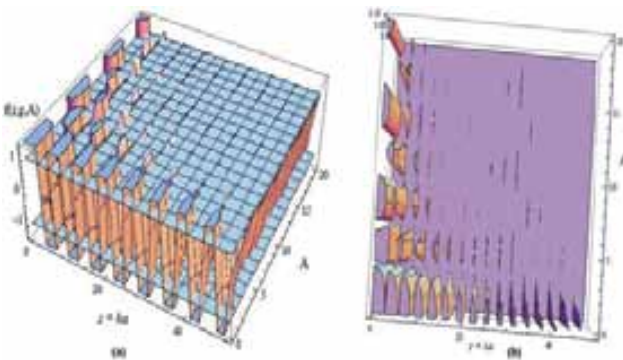


Figura 4. Gráfica de la ecuación 22: (a) Con  $p = 100$ , en función de  $z = ka$  y  $A$ . (b) Gráfica del valor absoluto de la ecuación 22 con  $p = 20$ , en función de  $z = ka$  y  $A$ .

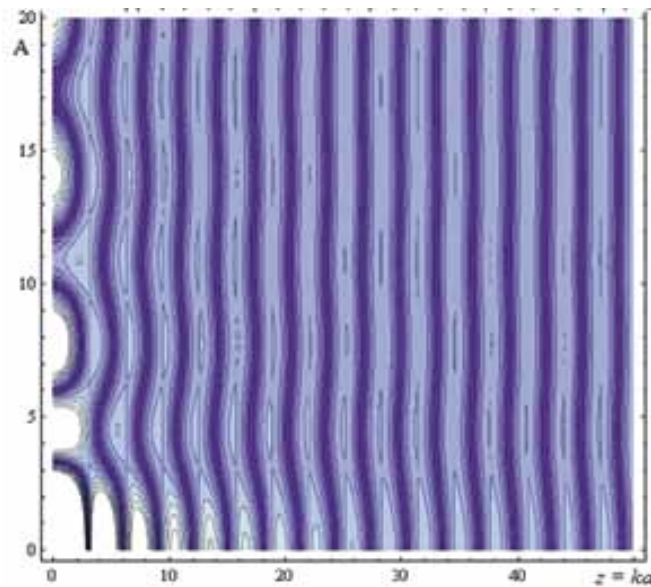


Figura 5. Superficies de nivel con  $p = 20$ , en función de  $z = ka$  y  $A$ . Las regiones oscuras corresponden a las bandas permitidas.

## CONCLUSIONES

Para amplitudes de la función de onda  $A$  constante, y coeficiente de no linealidad  $p$  pequeño, sólo se tiene una banda prohibida en la región de  $ka$  cercana a cero, conforme  $p$  crece, las bandas prohibidas se ensanchan, mientras que las bandas permitidas se vuelven cada vez más estrechas, hasta quedar localizadas en los puntos  $n\pi$ .

Para coeficientes de no linealidad  $p$  constante, y amplitud de la función de onda  $A$  variable, la anchura de las bandas prohibidas decrece conforme  $A$  aumenta, mientras que las bandas permitidas se ensanchan, pero cuando  $A$  alcanza un valor específico inicia un fenómeno de oscilación de la anchura tanto de las bandas prohibidas como permitidas, tal que a medida que  $A$  aumenta las bandas prohibidas se tornan cada vez más angostas y las bandas permitidas más anchas. Para  $A$  suficientemente grande desaparecen las bandas prohibidas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Programa de Colaboración Académica UNAM-UNISON y a la Dirección de Investigación y Posgrado de la UNISON por el Proyecto DCEN12-PI04.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Soukoulis, C.M. (Ed.). (2001). *Photonic Crystals and Light Localization in the 21st Century*. Kluwer Academic, Dordrecht. P. Lodahl, A.F. van Driel, I.S. Nikolaev, A. Irman, K. Overgaag, D. Vanmaekelbergh, W.L. Vos, Nature (London) 430 (2004) 654; K. Bush, S. Lölkes, R.B. Wehrspohn, H. Föll (Eds.), (2004). *Photonic Crystals: Advances in Design, Fabrication, and Characterization*, Wiley-VCH.
- 2) Kim, s., Gopalan, V. (2001). *Applied Physics Letters* 78, 3015; J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, J.N. Winn (1995). *Photonic Crystals*, Princeton University Press; K. Sakoda (2001). *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer; M. Golosovsky, Y. Saado, D. Davidov (1999). *Applied Physics Letters* 75, 4168; Y. Saado, M. Golosovsky, D. Davidov, A. Frenkel, *Physical Review B* 66 (2002) 195108.
- 3) Figotin, A., Godin, Y.A., Vitebski, I. (1998). *Physical Review B* 57, 2841; Chul-Sik Kee, Jae-Eun Kim, Hae Yong Park, Ikmo Park, H. Lim (2000). *Physical Review B* 61, 15523; C.S. Kee, J.E. Kim, H.Y. Park (1998). *Physical Review E* 57, 2327; J. Zhou, C.Q. Sun, K. Pita, Y.L. Lam, Y. Zhou, S.L. Ng, C.H. Kam, L.T. Li, Z.L. Gui (2001). *Applied Physics Letters* 78, 661.
- 4) Kitzrow, H.S., Reithaimer, J.P. (2004). Ref. 1c, Chap. 9; S. Gutiérrez-López, A. Castellanos-Moreno, A. Corella-Madueño, R.A. Rosas-Burgos and J.A. Reyes (2004). *Optics Comm.* 285: 2439-2444.

## BÚSQUEDA DE DISCOS PROTOPLANETARIOS EN CÚMULOS ABIERTOS JÓVENES

BRENDA PÉREZ RENDÓN\*, MARÍA EUGENIA CONTRERAS,  
LORENZO OLGUÍN RUÍZ Y JESÚS HIGUERA VALDENEBRO

*La formación de planetas está íntimamente ligada a la aparición de discos circunestelares: estructuras aplanadas de gas y polvo que se encuentran alrededor de algunas estrellas. Para estudiar el proceso de formación de los discos, su frecuencia de aparición y la evolución secular que eventualmente llevará a la formación de planetas, es necesario contar con una base observacional amplia que nos permita relacionar las propiedades de los discos con diversas características de su estrella central y del medio ambiente donde éstas se forman. En este trabajo presentamos una breve descripción del proceso de formación de los discos circunestelares, su posterior evolución y los esfuerzos que hemos realizado un grupo de investigadores universitarios en colaboración con colegas nacionales, para obtener resultados observacionales, algunos de los cuales se presentan en este artículo, con el fin de contribuir con más y mejores datos al entendimiento de la formación planetaria. Hasta ahora, los resultados obtenidos por nuestro grupo son un ingrediente más que ayuda a definir y esclarecer el proceso de formación planetaria, particularmente contribuyendo a la identificación de estrellas candidatas a poseer un disco circunestelar en cúmulos estelares jóvenes con la finalidad de muestrear el porcentaje de estrellas con disco en cúmulos, además del estudio de candidatos individuales.*

DRA. BRENDA PÉREZ RENDÓN  
Universidad de Sonora, Departamento de Investigación en Física  
Correo: [brenda@astro.uson.mx](mailto:brenda@astro.uson.mx)

DRA. MARÍA EUGENIA CONTRERAS  
UNAM, Instituto de Astronomía, Ensenada  
Correo: [mcontreras@astrosen.unam.mx](mailto:mcontreras@astrosen.unam.mx)

DR. LORENZO OLGUÍN RUIZ  
Universidad de Sonora, Departamento de Investigación en Física  
Correo: [lorenzo@astro.uson.mx](mailto:lorenzo@astro.uson.mx)

EST. JESÚS HIGUERA VALDENEBRO  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: [jhiguera@astro.uson.mx](mailto:jhiguera@astro.uson.mx)

\*Autor para correspondencia: Brenda Pérez Rendón  
Correo electrónico: [brenda@astro.uson.mx](mailto:brenda@astro.uson.mx)  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 17 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530



## INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad, el hombre se ha maravillado con la observación del cielo nocturno. Su curiosidad lo llevó a preguntarse y tratar de comprender la naturaleza de los objetos que brillaban en el firmamento y luego, de forma natural, le surgió la pregunta. ¿Entre esos objetos celestes existen mundos similares al nuestro? Aún en la actualidad tenemos sólo una respuesta parcial a esas inquietudes. Sin embargo, cada vez comprendemos mejor lo que son las estrellas y sabemos - como resultado de modernas técnicas de observación astronómica - que alrededor de muchas de ellas orbitan objetos de tipo planetario. Al día de hoy registramos la existencia de más de 861 planetas extrasolares orbitando alrededor de 677 estrellas (128 tienen más de un planeta) e incluso sabemos que algunos de ellos comparten algunas características con nuestro propio planeta. Aunque muchos de estos sistemas los conocemos únicamente de manera indirecta - gracias al efecto que producen en el espectro, el brillo o la posición de su estrella-, la presencia de cuerpos planetarios extrasolares se ha revelado como un fenómeno común en el Universo.

A medida que ha avanzado el conocimiento en la astrofísica y las herramientas con las que le es posible trabajar, las observaciones se han vuelto más precisas y detalladas. Así, hoy en día no sólo podemos observar características de los planetas de nuestro propio sistema solar sino de otros sistemas estelares. También es posible estudiar los discos que se forman alrededor de las estrellas durante su nacimiento, llamados *discos circunestelares*, y que se cree son las estructuras fundamentales para la formación planetaria. Para el estudio de estos discos primordiales, además de las herramientas observacionales, tenemos un mayor avance en las técnicas computacionales que nos permiten crear modelos cada vez más precisos sobre cómo se da el proceso de formación de sistemas similares a nuestro Sistema Solar. Este conocimiento nos acerca cada vez más a la respuesta sobre si algunos de esos mundos extrasolares son similares al nuestro e, incluso, a conocer si pudieran llegar a sustentar alguna clase de vida.

Las primeras detecciones de discos circunestelares que mostraban la presencia de un planeta, se hicieron en luz visible con el conocido caso de la estrella *Beta Pictoris* (1) (Figura 1). Desde entonces y hasta la actualidad, con técnicas de observación cada vez mejores, disponemos de imágenes de discos circunestelares jóvenes que van desde los formados principalmente por gas con una componente minoritaria de polvo - como los discos mostrados en la figura 2 pertenecientes a la región de Orión - hasta imágenes de discos más evolucionados, compuestos principalmente por material sólido y apenas rastros de gas (discos "de residuos"), como el caso de la estrella Fomalhaut (Figura 3). Estudiar la evolución de estos discos nos llevará a establecer una imagen completa del proceso físico de formación de los sistemas planetarios que actualmente son comunes alrededor de las estrellas.

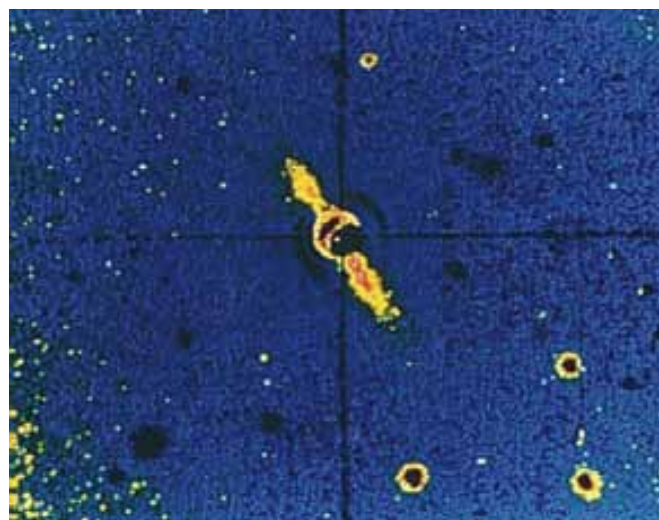


Figura 1. La imagen muestra un disco de polvo y gas alrededor de la estrella *Beta Pictoris* a unos 50 años luz de la Tierra. El disco se muestra de canto en colores falsos y se extiende por más de 400 UA (1 UA - unidad astronómica - corresponde a 149 597 871 km). Esta histórica imagen fue la primera confirmación en el óptico de la presencia de discos de gas alrededor de estrellas jóvenes. Crédito: Carnegie Institution, procesada por la University of Arizona y el Jet Propulsion Laboratory (JPL), cortesía de NASA. Imagen del telescopio de 2.5 m del Observatorio Las Campanas en Chile.



Figura 2. Imágenes del *Hubble Space Telescope* (HST) de discos protoplanetarios (*proplyds*) en Orión. Las imágenes fueron obtenidas con un filtro de luz *H $\alpha$* . El disco aparece en absorción para la mayoría de las líneas ópticas, p. ej. HST 294-606 contiene un disco visto de lado de aproximadamente 400 UA de radio. En todos los casos puede observarse claramente el frente de ionización que corresponde a la zona más brillante de cada imagen.

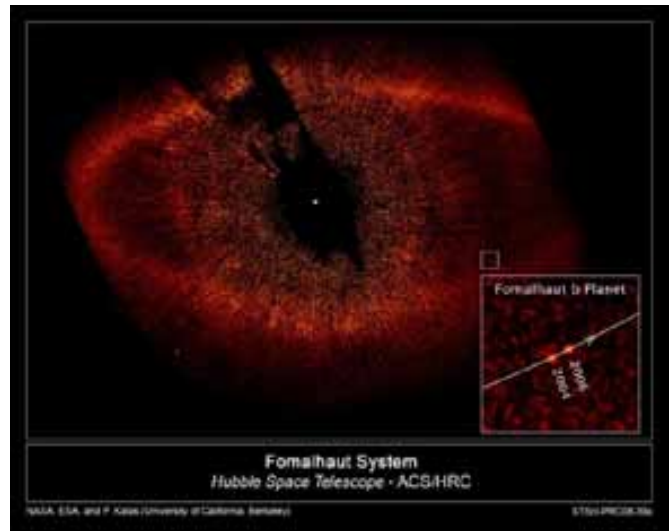


Figura 3. Disco de residuos que rodea al sistema Fomalhaut. Estos discos son la etapa final de los discos protoplanetarios donde el disco ya se ha vuelto ópticamente delgado (menos opaco) y contiene anillos de material muy evidentes, además de la presencia de cuerpos con masa planetaria y muy poco gas. Ésta es una de las etapas finales de la evolución de los discos protoplanetarios y la culminación de la formación de un sistema planetario. Imagen: NASA/ESA/P. Kalas (Univ. of California, Berkeley) et al.

### FORMACIÓN ESTELAR Y LA APARICIÓN DE LOS DISCOS CIRCUNESTELARES

El estudio de discos circunestelares comienza con la formación misma de las estrellas. Actualmente, la teoría de formación estelar más aceptada nos dice que las estrellas se forman a partir del colapso gravitacional que ocurre en enormes nubes de gas molecular que se encuentran en el plano de nuestra Galaxia (2). Dentro de estas extensas nubes se forman núcleos con mayor densidad que ocasionalmente son afectados por una perturbación externa (colisiones entre nubes, explosiones de supernovas, turbulencia del medio interestelar, etcétera) y responden a ésta colapsando sobre sí mismos por acción de su propia gravedad. Durante el colapso, los núcleos se fragmentan dando lugar a una gran cantidad de protoestrellas, es decir, estrellas en proceso de formación. Debido a que la nube tenía un movimiento de rotación inicial, la conservación del momento angular causa que a medida que los núcleos colapsan para formar protoestrellas, se forme alrededor un disco aplanado de material, perpendicular al eje de rotación de la protoestrella y que también se encuentre en rotación. Finalmente, la protoestrella termina con un disco en rotación a su alrededor llamado disco circunestelar. De acuerdo a las teorías más aceptadas actualmente, este disco atraviesa por diversas etapas de evolución que ocasionalmente conducen a la formación de planetas. Así



pues, es la rotación de la nube (a través de la conservación del momento angular) el fenómeno físico que causa la formación de discos de gas y polvo alrededor de las estrellas y será en gran medida la rotación del mismo la que determine su posterior evolución. Es importante resaltar que la formación de un sistema planetario surge como subproducto de la formación de una estrella y aunque ocurre con gran frecuencia, no todas las estrellas tienen planetas.



Los discos primordiales están embebidos en la nube de polvo y gas molecular en colapso, por lo que es difícil observarlos en el intervalo de luz óptica. Sin embargo, pueden ser detectados en longitudes de onda infrarroja y milimétrica. Es posible estudiar observacionalmente esta primera fase en estrellas muy jóvenes de baja masa tipo T-Tauri, al realizar un análisis minucioso de la distribución espectral de energía del sistema. Particularmente, el exceso de emisión en el infrarrojo cercano y medio es característico de la presencia de un disco, pues ésta es producida por el polvo presente en él. Con base en esta emisión es posible determinar la morfología del disco y determinar la temperatura y cantidad de polvo en él, así como sus características químicas (3). Además, es posible observar la emisión infrarroja de la envolvente más externa todavía en colapso esférico. En la evolución posterior, el polvo del disco sufre coalescencia (4), formando primero cuerpos de tamaño de metros y posteriormente alcanzando tamaños de unos pocos kilómetros, llamados *planetesimales*, que son cuerpos del orden de 10 km o más. Eventualmente, las colisiones entre planetesimales permitirá la formación de cuerpos mayores (5). En esta etapa, los discos son llamados *discos protoplanetarios*. También puede suceder que las colisiones sean tan violentas que el efecto sea la destrucción de los planetesimales, dejando una gran cantidad de polvo y cuerpos menores (2).

En el punto final de la evolución, después de la formación de un sistema planetario, la distribución espectral de energía de la protoestrella se vería como se muestra en la figura 4 (objeto Clase III). Ahí se muestra el espectro de un cuerpo negro que representa la emisión fotosférica de la protoestrella central, ya muy cerca de su entrada a la secuencia principal, y por lo tanto a punto de convertirse en una verdadera estrella. La presencia

del disco en luz infrarroja ha desaparecido, posiblemente porque el disco ha dado lugar a un sistema planetario.

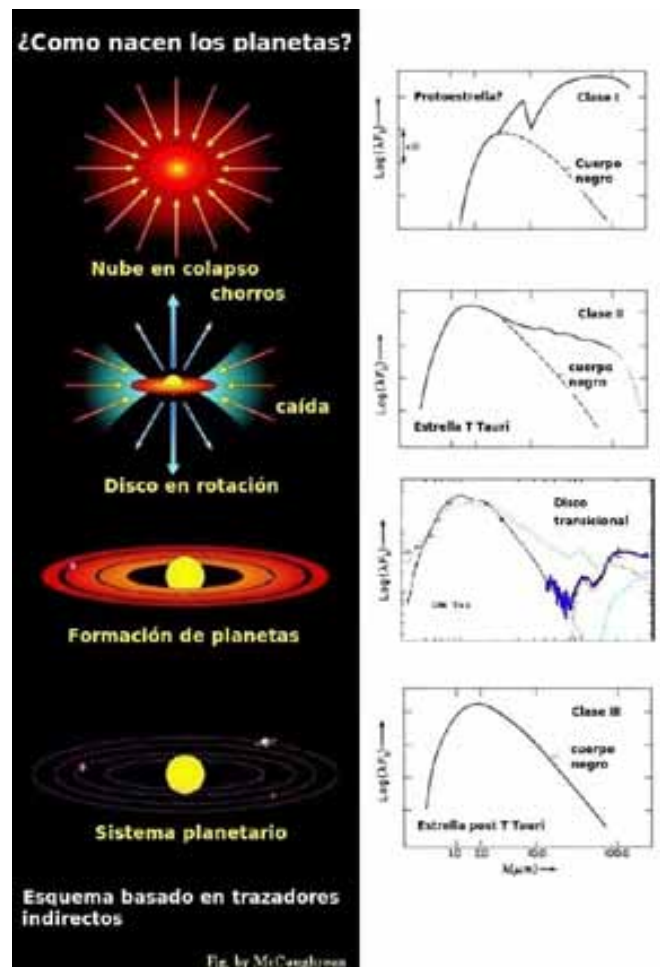


Figura 4. Diagrama esquematizado del proceso de formación de sistemas planetarios. Posteriormente a la formación inicial del disco, éste evoluciona como resultado del transporte de momento angular, así como por su interacción con la radiación de la protoestrella central. El polvo presente en el disco forma agregados cada vez mayores, dando lugar a planetesimales y posteriormente, planetas. Las fases intermedias de este proceso de formación de planetas aún se encuentran en constante análisis y discusión, al igual que las fases finales de disipación total del disco (6).

El proceso de formación planetaria dura del orden de pocos millones de años como puede verse en la figura 5, donde se muestra el porcentaje de estrellas con disco en cúmulos estelares jóvenes como función de la edad. Puede observarse que a mayor edad del cúmulo estelar, la frecuencia de discos entre sus miembros disminuye. De esta forma, cúmulos con edades entre 5 y 10 millones de años tienen un porcentaje prácticamente cero, es decir,

que los discos han desaparecido. Esto puede deberse a la evaporación causada por los vientos estelares, a la migración dinámica, a la formación de planetas o a una combinación de todos ellos.

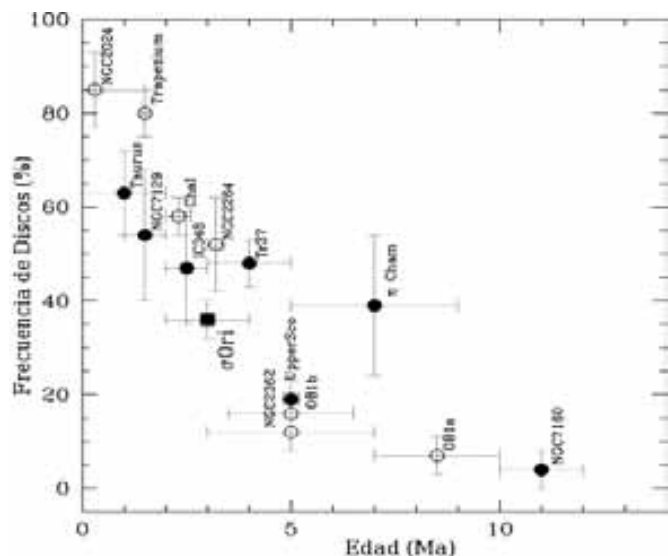


Figura 5. Diagrama de la frecuencia de discos en cada cúmulo como función de la edad del cúmulo, ésta se presenta en millones de años (Ma). Puede observarse que los cúmulos más jóvenes muestran un alto porcentaje de estrellas con disco y a medida que el cúmulo es más viejo, este porcentaje decrece hasta llegar a valores cercanos a 0 alrededor de los 10 Ma de edad (7).

## DISCOS PROTOPLANETARIOS Y CÚMULOS ESTELARES

Debido a que la formación y evolución de los discos protoplanetarios ocurre simultáneamente en las primeras etapas de la formación estelar, es evidente pensar que el estudio de los sistemas estelares más jóvenes nos dará información sobre la ocurrencia, frecuencia, comportamiento y desarrollo de éstos. En nuestra Galaxia, la formación estelar ocurre en las regiones del plano galáctico donde se encuentran las nubes moleculares, las cuales dan lugar a agrupaciones estelares de cientos o miles de estrellas, llamadas *cúmulos abiertos o galácticos*. Para la mayoría de estos cúmulos es posible calcular su edad, lo que nos permite seleccionar sólo aquellos que sean realmente jóvenes, astronómicamente hablando, con edades menores a 10 millones de años, para realizar en ellos una búsqueda de discos protoplanetarios. En cúmulos con edades mayores a ese límite, es probable que los discos ya hayan evolucionado a un sistema planetario y que ya se haya dado la dispersión casi total del gas y polvo que dejaron como residuo.

Ya que los cúmulos abiertos cuentan con una gran cantidad de estrellas, es posible hacer un estudio

estadístico de la frecuencia de los discos y la ocurrencia de éstos en cada una de sus diferentes etapas. Además, debido a que es posible determinar su edad, podemos obtener una buena estimación de los tiempos de cada una de las fases de evolución de los discos. Por ejemplo, si el tiempo de vida de un disco protoplanetario es de 5 a 7 millones de años y observamos cúmulos entre 7 y 10 millones de años, será muy poco probable encontrar emisión de algún tipo de disco en sus estrellas. Estudios de este tipo nos permiten conocer cuál es la frecuencia observada de discos protoplanetarios, estudiar sus etapas de evolución y hacer predicciones de la cantidad de sistemas planetarios que se encuentran en las estrellas.

Actualmente, nuestro grupo de trabajo realiza el estudio de cúmulos estelares jóvenes, con edades menores a 10 millones de años, buscando la emisión proveniente de estrellas con disco. Como primer paso, es conveniente detectar cuántas y cuáles estrellas de los cúmulos en estudio son candidatas a poseer un disco protoplanetario. Para esto se construyen diagramas fotométricos, en los cuales es posible detectar estrellas que presentan un exceso de emisión infrarroja.

En la figura 6 se presenta el diagrama color-color del cúmulo abierto NGC 2414, realizado con datos del catálogo público 2MASS (Two Micron All-Sky Survey). Este catálogo contiene información de la emisión en el infrarrojo cercano (alrededor de 2 micrómetros) de todas las estrellas y otros objetos celestes, hasta cierto límite de brillo. En nuestro estudio de NGC 2414, los datos de 2MASS junto con resultados de modelos teóricos de la emisión de radiación de los discos, nos ha permitido detectar aquellas estrellas que son fuertes candidatas a poseer un disco protoplanetario. Una vez detectadas, es posible construir la distribución espectral de energía de cada candidata con base en las observaciones infrarrojas en conjunto con observaciones ópticas obtenidas en el Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir, B.C. (OAN-SPM, IA-UNAM), con el fin de confirmar la presencia de un disco. De confirmarse, el disco puede ser catalogado dentro de alguna de las fases de evolución que ya se han discutido. Esto nos dará una idea de la frecuencia de ocurrencia de discos como función de la edad del cúmulo, así como del estado evolutivo en que se encuentran. Asimismo, es posible estudiar la correlación entre las características de la estrella y el disco que la rodea. Todo con la finalidad de comprender tanto las propiedades físicas de los discos protoplanetarios (tamaño, masa, densidad, temperatura), como su evolución y los procesos físicos que dan lugar a su transformación en sistemas planetarios.

A pesar de lo mucho que se ha avanzado hasta ahora en el conocimiento de las características y la formación de sistemas planetarios, éste sigue siendo un tema de investigación en constante desarrollo. Debido a la gran diversidad de propiedades y configuraciones que muestran los planetas extrasolares encontrados hasta el día de hoy, ninguno de los mecanismos propuestos para su formación puede catalogarse como universal. Sin embargo,



continuar con el desarrollo de estos estudios nos llevará a un mejor entendimiento de la evolución de los discos protoplanetarios y la subsecuente formación de planetas. De esta manera, nos acercamos más a la respuesta acerca de nuestro propio origen y nuestra posterior evolución en el contexto astronómico.

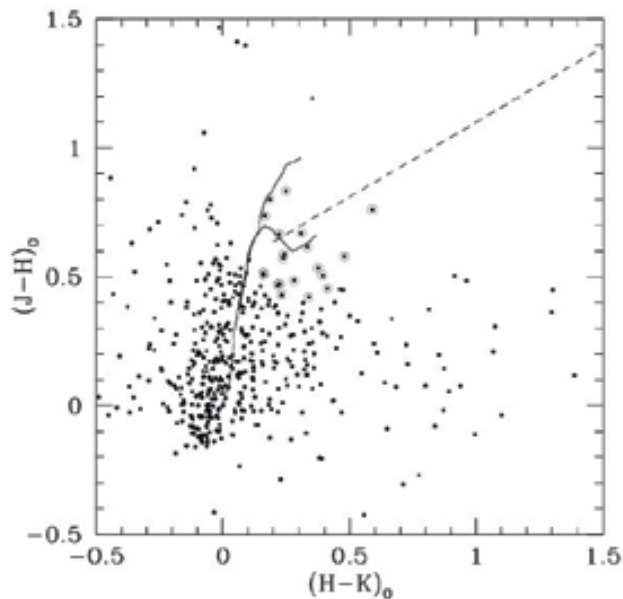


Figura 6. Diagrama color-color de fotometría de 2MASS del cúmulo abierto NGC 2414. Los filtros J (1.24  $\mu\text{m}$ ), H (1.65  $\mu\text{m}$ ) y K (2.16  $\mu\text{m}$ ) permiten el paso de la luz de un objeto en bandas del infrarrojo y el diagrama de los colores derivados, (J-H) vs (H-K), nos permite encontrar aquellos objetos con exceso de emisión en estas bandas. En esta figura, los círculos indican las estrellas que muestran un exceso en infrarrojo y que fueron seleccionadas como objetos candidatos a poseer un disco de acreción (8).

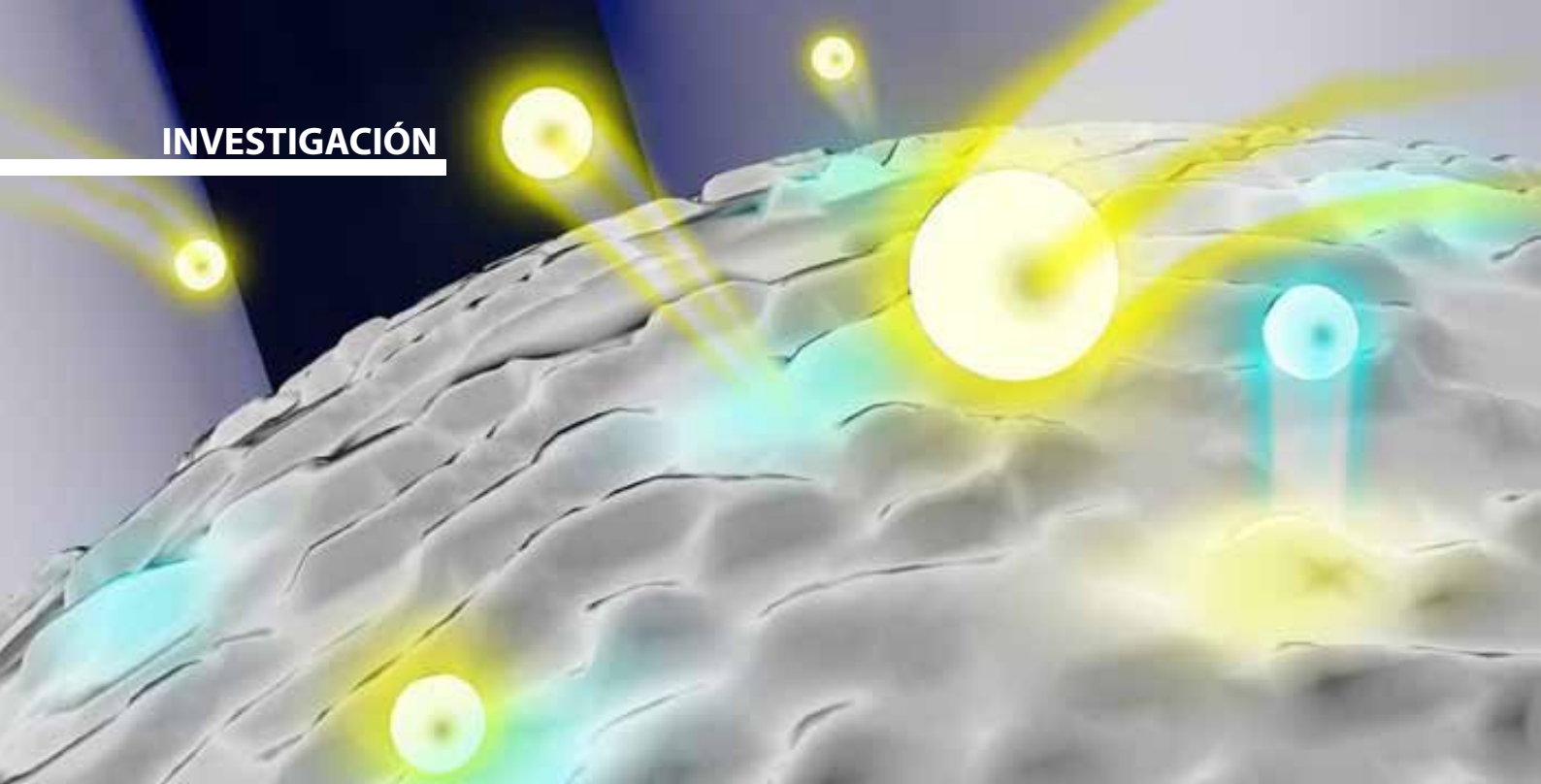
Finalmente, cabe resaltar que en varias de etapas de esta investigación ha resultado de gran importancia la participación de estudiantes de licenciatura, que han tenido la oportunidad de realizar observaciones astronómicas en los observatorios nacionales de mayor relevancia y, además, de colaborar con investigadores de otras instituciones, contribuyendo así a su desarrollo académico y orientación profesional. Reconocemos que su colaboración ha sido muy importante para el avance de nuestro trabajo y esperamos que en el futuro, otros estudiantes se incorporen a este proyecto.

Los autores agradecen el apoyo del proyecto PAPIIT-UNAM-IN109311, CONACyT CB 104651 y de una beca ayudantía otorgada por la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Smith, B.A., Terrile, R.J. (1984). *A circumstellar disk around Beta Pictoris*. Science, Vol. 226, Dec. 21, 1421-1424.
- 2) Shu, F., Adams, F.C., Lizano, S. (1987). *Star formation in molecular clouds-Observation and theory*. Annual Review of Astronomy & Astrophysics, 25, 23.
- 3) Walsh, C.; Millar, T.J.; Nomura H. (2010). *Chemical processes in protoplanetary disks*. Astrophysical Journal, 722, 1607.
- 4) Jijina, J., Adams, F.C. (1996). *Infall collapse solutions in the inner limit: radiation pressure and its effects on star formation*. Astrophysical Journal, 462, 874.
- 5) Blum, J. & Wurm, G. (2008). *The growth mechanisms of macroscopic bodies in protoplanetary disks*. Annual Review of Astronomy & Astrophysics, 46, 21.
- 6) Lada, C. and Shu, F. (1990). *The formation of sunlike stars*. Science, 248, 564.
- 7) Hernández, J., Hartmann, L., Megeath, t., Gutermuth, r., Muzerolle, J., Calvet, N., Vivas, A.K., Briceño, C. Allen, L., Stauffer, J. Young, E. and Fazio, G. (2007). *A Spitzer Space Telescope study of disks in the young  $\sigma$  Orionis cluster*. Astrophysical Journal, 662: 1067-1081.
- 8) Contreras, M.E., Pérez-Rendón, B., Olguín, L., Saucedo, J.C. (2011). *Photometric search for accretion disks in young clusters NGC 2414*. Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, (SC) 40, 270.





## MATERIALES ULTRABLANDOS: DIAGRAMA DE FASE DE UNA SUSPENSIÓN COLOIDAL DE POLÍMEROS ESTRELLA

GREGORIO ALEJANDRO VEJAR DELGADO\*,  
HERIBERTO ACUÑA CAMPA Y LAURA L. YEOMANS REYNA

*La determinación experimental y predicción teórica de diagrama de fases para las sustancias es un aspecto de la mayor importancia en la ciencia de materiales. La cristalización y fusión a pesar de ser fenómenos cotidianos y de estar dentro de la agenda de estudio de la mecánica estadística desde sus inicios, aún no provee una teoría que las explique de primeros principios. La dificultad principal se debe a que estas transiciones se presentan en sistemas concentrados convirtiéndose en un problema colectivo de muchos cuerpos. Es en este contexto que la prescripción de criterios fenomenológicos que permitan la localización de las líneas de transición es altamente valorada por la comunidad científica. Motivados por ello, en esta comunicación se presentan resultados obtenidos con el criterio de Löwen, mediante simulaciones computacionales, para una suspensión coloidal de partículas ultra suaves conformada por polímeros estrella.*

FÍS. GREGORIO ALEJANDRO VEJAR DELGADO  
Universidad de Sonora, Departamento de  
Investigación en Física, Posgrado en Física  
Correo: gavejard@correo.fisica.uson.mx  
DR. HERIBERTO ACUÑA CAMPA  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: hacuna@correo.fisica.uson.mx  
DRA. LAURA L. YEOMANS REYNA  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: lyeomans@correo.fisica.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Gregorio Alejandro Vejar Delgado  
Correo electrónico: gavejard@correo.fisica.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 20 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN

A pesar de que la transición sólido-líquido es no universal, existen algunos criterios fenomenológicos basados en propiedades de una de las fases en coexistencia. Las ventajas de estos criterios consisten en que permiten estimar la línea de coexistencia sólido-líquido sin necesidad de realizar cálculos de energías libres. Además, predicen valores cuasi-universales de propiedades estáticas y dinámicas. Por valores cuasi-universales se entiende que los valores de la propiedad estática o dinámica que caracteriza la transición no es propiamente una constante; sin embargo, es un número cercanamente fijo en alrededor de un 10% (1).

Se debe distinguir entre dos clases de universalidades. Primero, se puede variar la temperatura de un sistema manteniendo fijo el potencial par entre las partículas y estudiar las propiedades a lo largo de la línea de transición. Haciendo uso de escalamiento de propiedades de potenciales de interacción de potencia inversa, por ejemplo  $1/r^n$ , se observa de inmediato que cualquier cantidad adimensional adecuadamente escalada es universal a lo largo de la línea de fusión y cristalización. Esta primera universalidad es trivial para potenciales de potencia inversa, sin embargo es menos trivial para potenciales más complicados. El segundo tipo de universalidad, que es más general, se manifiesta si una propiedad tiene el mismo valor en la transición sólido-fluido para diferentes sistemas, es decir, para sistemas cuyas partículas interaccionan con diferentes tipos de potenciales pares.

A continuación se describen brevemente tres de los criterios fenomenológicos más utilizados en la descripción de las transiciones sólido-fluido: criterio de *Lindemann*, criterio de *Hansen-Verlet* y finalmente el criterio de *Löwen*.

**Criterio de Lindemann:** Este criterio fue la primera regla fenomenológica para describir la transición de fusión (sólido-fluido), propuesta por Lindemann en 1910 en su artículo *The calculation of molecular vibration frequencies* (2). El criterio establece que el cociente  $L$  de la raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio y la distancia promedio entre partículas adquiere un valor universal en la línea de transición:

$$L \equiv \frac{\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle}}{a} \sim 0.15 \quad (1)$$

La pregunta sobre el carácter de la universalidad de este criterio, particularmente, sobre si es del segundo tipo, es decir, válido independientemente del potencial de interacción entre las partículas del sistema, fue intensamente discutido durante las décadas de 1980-1990. Mediante cálculos con simulaciones computacionales sabemos ahora que el valor de  $L$  depende ligeramente del tipo de potencial de interacción y su valor aproximado es de 0.15 ( $L=0.185$  para potenciales muy suaves;  $L=0.17$  para potenciales de partículas cargadas tipo Yukawa;  $L=0.129$  para esferas duras). El criterio de Lindemann se puede entender intuitivamente como el rompimiento del

ordenamiento de la celda formada por partículas vecinas si su desplazamiento excede un valor crítico, es decir, si éste adquiere un valor un orden de magnitud menor que el correspondiente a la distancia media de sus partículas vecinas.



**Criterio de Hansen-Verlet:** Este criterio constituye una regla fenomenológica para la transición de cristalización, misma que fue formulada en 1969 por Hansen y Verlet en su artículo *Phase Transitions of the Lennard-Jones System* (3). Mediante simulaciones por computadora encuentran que para un líquido de Lennard-Jones el valor máximo de la amplitud del factor de estructura adquiere un valor constante a lo largo de la línea de transición convirtiéndose con ello en un criterio de universalidad del primer tipo:

$$S(k_{max}) \sim 2.85 \quad (2)$$

Sin embargo, mediante experimentos de dispersión y cálculos de simulaciones moleculares para otros tipos de sistemas cuyos potenciales de interacción no son de Lennard-Jones, se ha confirmado que la transición de cristalización se presenta siempre cuando el valor máximo de  $S(k)$  es cercano al valor de 3. De esta forma se considera que el criterio de Hansen y Verlet también posee la universalidad del segundo tipo, es decir, tiene un sentido más general.

**Criterio de Löwen-Palberg-Simon:** En 1993, Löwen, Palberg y Simon proponen un criterio estrictamente dinámico para describir la transición de cristalización para sistemas coloidales. En su artículo *Dynamical Criterion for Freezing of Colloidal Liquids* (4) aportan una prescripción sencilla que establece que el cociente del coeficiente de difusión de tiempos largos  $D_L$  y el coeficiente de difusión de tiempos cortos  $D_S$  adquiere un valor constante a lo largo de la línea de transición de cristalización:

$$\frac{D_L}{D_S} \sim 0.1 \quad (3)$$



Este criterio fue planteado como producto del estudio de la cristalización de fluidos coloidales cargados mediante simulaciones de dinámica Browniana para un sistema de partículas que interactúan con un potencial de interacción modelo tipo Yukawa, así mismo, presentan resultados para un fluido de esferas duras y para plasmas de una componente (OCP). En el mismo artículo reportan resultados experimentales de dispersión de Rayleigh de suspensiones coloidales estabilizadas con carga que confirman esta regla fenomenológica. De lo anterior se desprende que el criterio dinámico es universal en el sentido más general (segundo tipo) por cumplirse para diferentes tipos de potenciales de interacción. Más aun, en 1996 el propio Löwen reporta que el criterio dinámico propuesto y verificado para el caso de sistemas tridimensionales, también se satisface para describir transiciones de cristalización en sistemas de partículas en espacio bidimensional, que interactúan mediante un potencial que depende del inverso de una potencia de la separación entre las partículas.

En los últimos años se ha explorado el alcance de estos criterios fenomenológicos en condiciones diferentes, por ejemplo, Hoffmann y Löwen estudian mediante simulaciones de no-equilibrio a un sistema coloidal de partículas cargadas en presencia de un campo eléctrico oscilatorio, obteniendo que en estado estacionario los criterios fenomenológicos de Lindemann, Hansen-Verlet y de Löwen-Palberg-Simon también se satisfacen en sistemas ligeramente polidispersos (5). Por otra parte, en años recientes y producto de la interacción entre académicos a través de las Redes Temáticas de Colaboración, como la Red Física de la Materia Blanda (PROMEP) y la Red de la Materia Condensada Blanda (CONACYT), se ha podido avanzar en el estudio de la equivalencia dinámica entre fluidos atómicos y coloidales. Una consecuencia importante de dicha equivalencia ha sido la extensión del criterio dinámico de Löwen, planteado originalmente para sistemas coloidales, al caso de la transición de cristalización en sistemas atómicos. Este resultado fue corroborado mediante la comparación de simulaciones de dinámica molecular y dinámica Browniana para sistemas de esferas duras y para otros sistemas de partículas con potenciales repulsivos suaves (Lennard-Jones truncado y Yukawa) que son dinámicamente equivalentes a un fluido de esferas duras (6).

### SISTEMA MODELO DE POLÍMEROS ESTRELLA

Los polímeros estrella son macromoléculas compuestas por  $f$  cadenas poliméricas ancladas químicamente a un centro común. Al número de brazos  $f$  conectados se le llama funcionalidad de la estrella y cuando la longitud característica de las cadenas es suficientemente grande, la longitud del tamaño del núcleo central es irrelevante. En la figura 1 se ilustran configuraciones de polímeros estrella para dos funcionalidades diferentes (7).

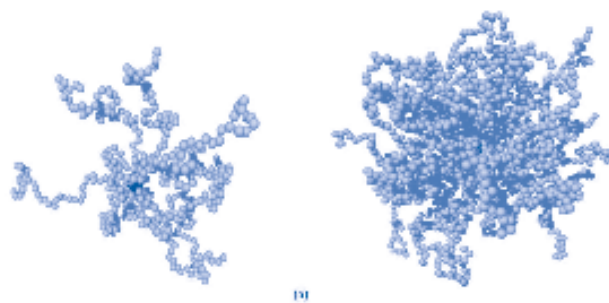


Figura 1. Polímeros estrella obtenidos con simulación para (a)  $f=10$  y (b)  $f=50$ .

La síntesis de los primeros polímeros estrella se hizo en la década de 1990 y como lo señala Likos, desde el punto de vista experimental la síntesis de estructuras regulares (en funcionalidad y longitud de las cadenas) hizo posible explorar la física de sistemas monodispersos ultrasuaves. Desde el punto de vista de aplicación tecnológica, los polímeros estrella han sido importantes como modificadores de la viscosidad en la industria de hidrocarburos, así como también como materiales de recubrimiento de superficies, entre otras. Los polímeros estrella constituyen un sistema importante dentro del campo de la materia condensada blanda, toda vez que en su estudio confluyen dos grandes campos de ella: la física de polímeros y la física coloidal (8).

Para funcionalidades pequeñas ( $f=1$  y  $2$ ) los polímeros estrella se asemejan a una estructura lineal, mientras que para valores grandes de la funcionalidad adquieren una forma esférica y de consistencia más rígida, de forma tal que en el límite de funcionalidad extrema se aproximan al comportamiento de un sistema de esferas duras.

El modelo de potencial de interacción para polímeros estrella tiene una forma tipo Yukawa para  $r > \sigma$  y una forma logarítmica para  $r \leq \sigma$ , mismas que se unen adecuadamente en  $r = \sigma$  pidiendo continuidad en sus primeras derivadas. La longitud característica  $\sigma$  se identifica como el diámetro de corona dentro del modelo de Daoud-Cotton. La dependencia logarítmica del modelo fue derivada por Witten y Pincus en 1986, mientras que el decaimiento tipo Yukawa se incluyó de forma empírica para ajustar a los resultados experimentales obtenidos con dispersión de neutrones de bajo ángulo (SANS). De esta forma, la expresión matemática del potencial de interacción efectivo por pares se expresa como:

$$u(r) = \frac{5}{18} k_B T f^{\frac{3}{2}} \begin{cases} -\ln\left(\frac{r}{\sigma}\right) + \left[1 + \frac{\sqrt{f}}{2}\right]^{-1} & \text{si } r \leq \sigma \\ \frac{\sigma}{r} \left[1 + \frac{\sqrt{f}}{2}\right]^{-1} \exp\left[-\frac{\sqrt{f}}{2} \left(\frac{r}{\sigma} - 1\right)\right] & \text{si } r > \sigma \end{cases} \quad (4)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta. En la figura 2 se ilustra el comportamiento del

modelo de potencial para  $18 \leq f \leq 256$ . Como se observa, conforme se incrementa el valor de la funcionalidad se presenta más abrupta la transición para  $r \leq \sigma$ , consistente con el hecho de que a funcionalidades suficientemente grandes el potencial de interacción debe corresponder al potencial de esferas duras.

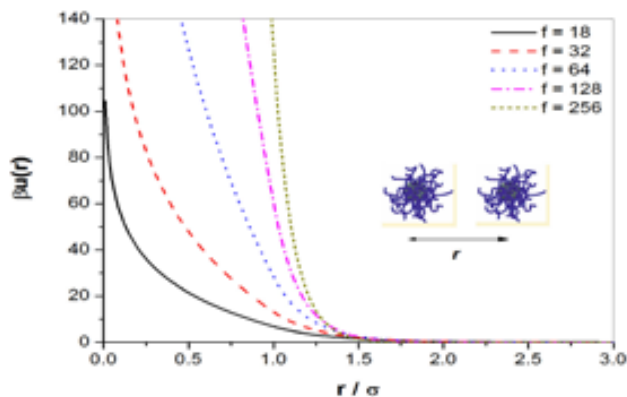


Figura 2. Potencial de interacción entre polímeros estrella. La curva del extremo izquierdo corresponde a  $f = 32$  mientras que la del extremo derecho a  $f=256$ .

### CONSTRUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE FASE

En 1999 Watzlawek y colaboradores presentan el diagrama de fases (Figura 3) de un sistema monodisperso de polímeros estrella, obtenido mediante el método del cálculo de energías libres e integración termodinámica a partir de cálculos de Montecarlo (9).

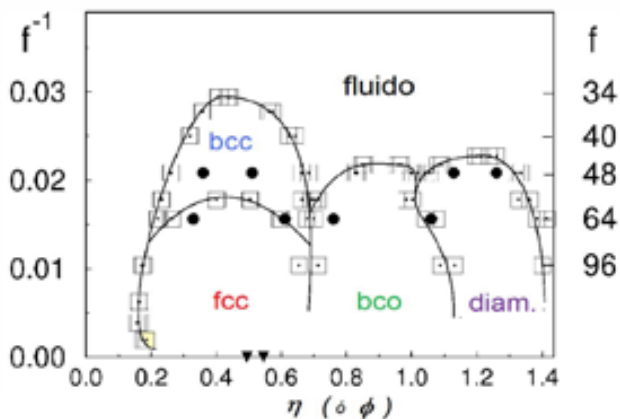


Figura 3. Diagrama de fases obtenido por Watzlawek, Likos y Löwen.

Como se observa en la figura 3, para fracciones en volumen ( $\eta \equiv \pi \rho^* / 6$ , con  $\rho^* \equiv \rho \sigma^3$  la densidad reducida) menores a 0.7 y funcionalidades mayores a  $f=34$  se predicen estructuras cristalinas fcc y bcc (cúbica centrada en la cara y cúbica centrada en el cuerpo, respectivamente); mientras que para fracciones en volumen mayores a 0.7 y

funcionalidades mayores a 44, establecen la existencia de estructuras cristalinas más complejas tipo bco y diamante. Finalmente, se predicen fases fluidas tanto para valores pequeños de la fracción en volumen (situación normal en sistemas de partículas duras) y también para valores grandes, siempre y cuando en este segundo caso las funcionalidades de los polímeros estrellas asuman valores adecuadamente pequeños de la funcionalidad. Con lo anterior el diagrama de fases presenta diferentes tipos de re-entrancias fluido-sólido y también entre fases cristalinas diferentes. Por otra parte, en 2007, Laurati y colaboradores (10), obtienen resultados experimentales de SANS para un sistema micelar PEP-PEO de polímeros estrella, en la región de funcionalidades intermedias y fracciones en volumen  $\eta < 0.5$ .

Como se señaló previamente, en el contexto del estudio de las propiedades estructurales y dinámicas de sistemas coloidales de partículas ultrasuaves, nos planteamos explorar la construcción de un diagrama de fases para el sistema de polímeros estrella a partir de la aplicación del criterio fenomenológico de Löwen y mediante simulaciones de dinámica Browniana. Para ello se elaboró e implementó un código en lenguaje FORTRAN haciendo uso del algoritmo de Ermak y McCammon, que permite calcular la posición como función del tiempo de  $N$  partículas de una suspensión coloidal en el régimen difusivo a partir de las Ecuaciones de Langevin.

Conocidas las configuraciones del sistema (posiciones de todas las partículas a tiempos diferentes) es posible calcular las propiedades estadísticas dinámicas de la suspensión, como son el coeficiente de difusión dependiente del tiempo  $D(t)$  y el desplazamiento cuadrático medio  $W(t)$ . Al igual que con simulaciones de Montecarlo, también es posible calcular propiedades estructurales como la función de distribución radial  $g(r)$ . En la figura 4 se ilustra la concordancia de los resultados obtenidos con estos dos métodos de simulación, mediante la comparación de las funciones de distribución radial obtenidas para un sistema de polímeros estrellas de baja funcionalidad (partículas muy blandas) y un amplio intervalo de valores de la fracción en volumen  $\phi$ .

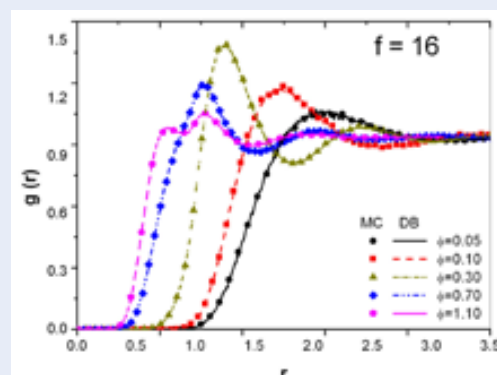


Figura 4. Función de distribución radial de suspensiones de polímeros estrella obtenidos mediante simulaciones de Montecarlo y dinámica Browniana.



Para implementar el criterio de Löwen fue necesario calcular coeficientes de difusión como función del tiempo, de forma tal que fuese posible identificar si en un tiempo suficientemente largo, el cociente  $D_L/D_0$  adquiría un valor aproximado a 0.1. Es decir, buscamos la isodifusiva de 0.1 para una suspensión coloidal monodispersa de polímeros estrella. Ello implicó realizar simulaciones sistemáticas: (i) para valores fijos de la funcionalidad aumentando la fracción en volumen desde las regiones fluidas de baja concentración; (ii) para las regiones de baja funcionalidad y alta concentración, fue necesario realizar simulaciones sistemáticas para valores fijos de fracción en volumen aumentando el valor de la funcionalidad desde las regiones fluidas de sistemas ultra blandos (funcionalidad pequeña). En la figura 5 se ilustra una gráfica de exploración de la transición de cristalización.

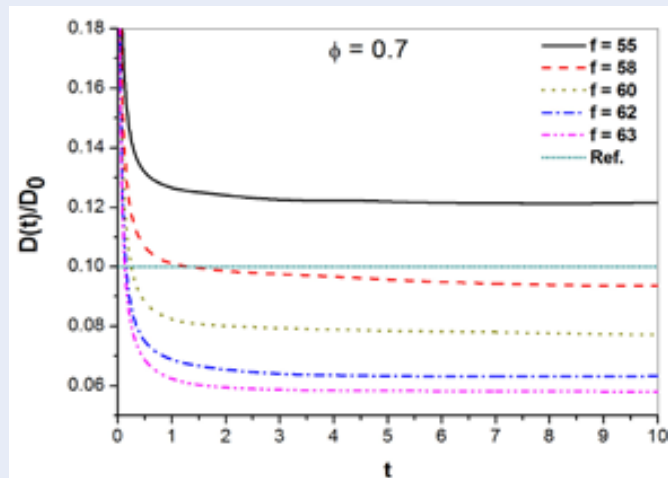


Figura 5. Coeficiente de difusión dependiente del tiempo. Aplicación del Criterio de Löwen en un sistema de fracción en volumen fija y funcionalidad variable.

En la figura 6 se muestran los resultados obtenidos haciendo uso del criterio de Löwen (círculos rojos) con las simulaciones de dinámica Browniana descritas

previamente; así mismo y de forma comparativa, se incluyen los resultados obtenidos mediante los cálculos de energía libre e integración termodinámica de la figura 3 (círculos azules). Con símbolos (cruces rojas para fluido y negras para cristal) se han colocado los resultados experimentales para el sistema de polímeros estrella de micelas PEP-PEO obtenidos por Laurati y colaboradores con la técnica de SANS. En la figura también se incluyen resultados teóricos obtenidos del cálculo de energías libres a partir de propiedades estructurales obtenidas con teorías de líquidos (Roger-Young) y para la región sólida mediante teoría de perturbaciones.

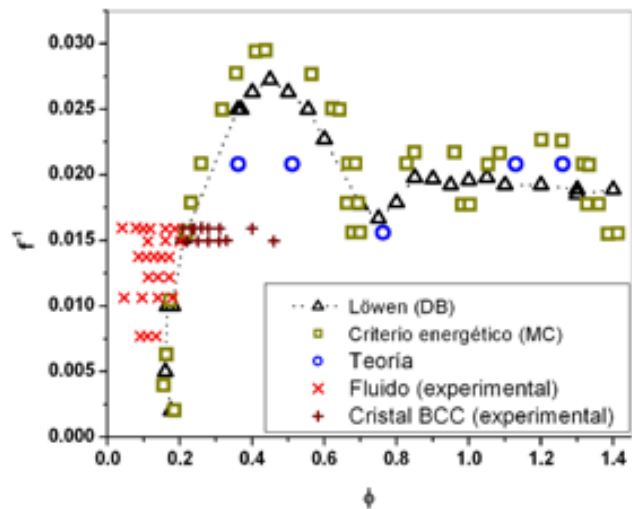


Figura 6. Diagrama de fase de un sistema monodisperso de polímeros estrella.

Como se concluye de la figura comparativa, en el régimen de alta funcionalidad y baja fracción en volumen, los resultados obtenidos con el criterio de Löwen coinciden con los reportados haciendo uso de cálculos de energía libre con Montecarlo y los resultados experimentales reportados en la literatura. Esto nos brinda confianza en



la metodología seguida para la exploración de la línea de transición de cristalización mediante el cálculo de coeficientes de difusión dependientes del tiempo con simulaciones de dinámica Browniana. En la región de partículas extremadamente suaves (funcionalidad baja) y fracciones en volumen intermedias y altas (presencia de traslapes entre los polímeros estrella), los resultados obtenidos con el criterio de Löwen aparentan estar comprendidos entre los resultados reportados con cálculos de energía libre con Montecarlo y teóricos.

## CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una descripción de los criterios fenomenológicos más valiosos en el estudio de las transiciones de fase sólido-líquido en el campo de la materia condensada. Dos de ellos corresponden a criterios de carácter estructural (Lindemann y Hansen-Verlet) y el tercero (Lowen-Palberg-Simon) de carácter estrictamente dinámico. Mediante simulaciones de Montecarlo y dinámica Browniana se estudian las propiedades estructurales y dinámicas de una suspensión coloidal monodispersa de partículas ultrablandas de polímeros estrella para diferentes condiciones de suavidad (funcionalidad) y concentración (o fracción en volumen). Como aplicación relevante, se usa el criterio dinámico de Löwen para construir el diagrama de fase de la suspensión, concretamente para obtener la línea de transición de cristalización.

Por los resultados obtenidos, se puede dar cuenta del valor de la herramienta de la simulación molecular para entender, extender y comparar con resultados teóricos y experimentales de sistemas fisicoquímicos de estructura compleja. En particular para el sistema formado por polímeros estrella es relevante la comparación de los resultados mostrados en el diagrama de fase, ya que manifiesta, por una parte, la validación del modelo de interacción involucrado en la simulación, así como la utilidad de los criterios fenomenológicos, de Löwen en este caso, para estudiar comportamientos en líneas de transición fase.

Para el futuro se abre la perspectiva de estudiar estos sistema ultrasuaves (o ultrablandos), entre otros, para el caso de mezclas. Particularmente nos interesa explorar a profundidad el caso de sistemas polidispersos en tamaño y funcionalidad. Estudios preliminares nos indican que para polidispersidad en tamaño de aproximadamente 12% el diagrama de fases no se modifica sustancialmente para fracciones en volumen menores a 0.7, sin embargo para valores mayores, el sistema se convierte en uno altamente interactuante que requiere de una exploración más detallada y una revisión técnica más minuciosa, sobre las condiciones de continuidad del potencial demandadas en las simulaciones de dinámica Browniana. Consideramos que la incorporación del factor de polidispersidad (tanto en funcionalidad como en tamaño) para responder a preguntas tales como ¿Cuál es la modificación que se

induce por polidispersidad en el diagrama de fases? o ¿Es posible frustrar por completo una transición de equilibrio (como la de cristalización) para obtener estados metaestables como los vidrios? es de la mayor relevancia, toda vez que en las suspensiones coloidales reales, la polidispersidad es una propiedad inherente a los sistemas y es todo un reto el control experimental de esta propiedad.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el financiamiento obtenido mediante el Proyecto de la Red Temática de Colaboración Física de la Materia Blanda SEP/PROMEPE.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Lowen, H. (1994). *Melting, freezing and colloidal suspensions*. Physics Report, Vol. 237, Issue 5: 249-324.
- 2) Lindemann, F.A. (1910). *The calculation of molecular vibration frequencies*. Phys. Z. 11: 609-612.
- 3) Hansen, J.P. and Verlet, L. (1969). *Phase transitions of the Lennard-Jones system*. Phys. Rev. 184: 151-161.
- 4) Löwen, H., Palberg, T. and Simon, R. (1993). *Dynamical criterion for freezing of colloidal liquids*. Phys. Rev. Lett. 70: 1557-1560.
- 5) Hoffmann, G.P. and Löwen, H. (2001). *Freezing and melting criteria in non-equilibrium*. J. Phys.: Condensed Matter 13, 9197.
- 6) López, L., Yeomans, L., Chávez, M. and Medina, M. (2012). *The overdamped van Hove function of atomic liquids*. J. Phys.: Condensed Matter 24, 375107. Ramírez, P., López, L., Acuña, H. and Medina, M. (2011). *Density-Temperature-Softness scaling of the dynamics of glass-forming soft-sphere liquids*. Phys. Rev. Lett. 107, 155701.
- 7) Vejar D., G.A. (2012). *Suspensión coloidal de polímeros estrella. Propiedades estructurales y dinámicas con simulaciones computacionales*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Física, Universidad de Sonora, Diciembre.
- 8) Likos, C.N. (2006). *Soft matter with soft particles*. Soft Matter 2, 478.
- 9) Watzlawek, M., Likos, C.N. and Löwen, H. (1999). *Phase diagram of star polymer solutions*. Phys. Rev. Lett. 82, 5289.
- 10) Laurati, M., Stellbrink, J., Lund, R., Willner, L., Zaccarelli, E. and Richter, D. (2007). *Asymmetric poly (ethylene-alt-propylene)-poly (ethylene oxide) micelles: A system with star like morphology and interactions*. Phys. Rev. E 76, 041503.



## MODELO PREDICTIVO DE RIESGO DE MOROSIDAD PARA CRÉDITOS BANCARIOS USANDO DATOS SIMULADOS

CLAUDIO ALFREDO LÓPEZ MIRANDA\*

*Un problema grave en las instituciones de crédito son los préstamos no recuperados, por lo que al momento de la solicitud, es deseable un modelo matemático para predecir el riesgo de tener un cliente potencialmente moroso, ya que su capacidad económica no garantiza por si sola el pago. Este trabajo presenta, a través de datos simulados, una técnica estadística conocida como regresión logística para predecir la probabilidad de no recuperar un crédito, con base al perfil socioeconómico del cliente, considerando el número de dependientes económicos, número de impagos previos, su empleo, destino del crédito y salario mensual. El modelo predictor logra una tasa aciertos de 95% para clientes morosos y una tasa global del 70% de clasificaciones correctas. Los resultados sirven para apreciar los indicadores estadísticos conocidos, como la razón de ventajas por categorías. Por ejemplo, por cada crédito previo no pagado del cliente, se estima que el riesgo es 3.7 veces mayor y por cada \$1,000.00 de incremento en el salario se estima que el riesgo (multiplicativo) disminuye por un factor del 80%.*

DR. CLAUDIO ALFREDO LÓPEZ MIRANDA  
 Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas  
 Correo: claudio@gauss.mat.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Claudio Alfredo López Miranda  
 Correo electrónico: claudio@gauss.mat.uson.mx  
 Recibido: 12 de marzo de 2013  
 Aceptado: 11 de junio de 2013  
 ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN

La regresión logística ha sido aceptada durante las últimas décadas como modelo de predicción-clasificación desde sus orígenes en investigaciones epidemiológicas y clínicas (1). Hoy en día se emplea comúnmente, aunque no limitada a, investigaciones biomédicas, negocios y finanzas, criminología, ingeniería, salud pública, política, biología de la vida salvaje y psicología. Las aplicaciones van desde créditos no recuperados (2), votación en elecciones políticas (5), asignación de una beca, hasta predicción de cáncer de próstata (4), riesgo de contagio de VIH (4), etcétera.

La regresión logística es una técnica de estadística multivariada basada en los principios de regresión lineal, pero a diferencia de ésta, la regresión logística utiliza una variable dependiente categórica binaria o dicotómica (en vez de una variable cuantitativa continua) cuyo resultado o valor de respuesta es 0 o 1; por ejemplo, en créditos bancarios se asigna 1 si los datos observados provienen de un cliente moroso y 0 en caso contrario. Debido a que la morosidad es una variable dicotómica que depende como variable de respuesta de otros indicadores tales como el salario y las cargas familiares, entre otros, es factible aplicar la regresión logística como modelo clasificador. Además, el modelo puede utilizarse para estimar la probabilidad de que un cliente no devuelva el crédito; a dicha probabilidad se le conoce como riesgo de morosidad. El status de morosidad se categorizará dependiendo si la probabilidad estimada, evaluada con los datos del cliente, es mayor que un punto de corte, el cual debe prefijarse por cada institución particular con base en su experiencia, por ejemplo:  $P_c = 0.30$ , o bien usar una técnica formal para seleccionarlo (3).

## EL MODELO DE REGRESIÓN LOGÍSTICA

El modelo de regresión logística surge cuando queremos estimar la probabilidad de un evento dicotómico de Si (1) o No (0), en función de un conjunto de variables predictoras comúnmente llamados factores de riesgo, que pueden ser discretas o continuas, categóricas (nominales u ordinales), cualitativas o cuantitativas. En ocasiones la variable de respuesta  $Y$ , o variable dependiente, tiene más de dos categorías, para la que existen otras técnicas no tratadas aquí (1) y (3). Estos modelos son especialmente útiles cuando de manera natural o controlado experimentalmente, la probabilidad de ocurrencia del evento de interés (etiquetado con un 1) sigue una forma-S o **sigmoideal**, por ejemplo, en casos reportados de estudios clínicos, (1) y (3), el riesgo  $p$  de padecer hipertensión típicamente se comporta en la forma-S conforme aumenta la edad  $x$  (*i.e.*, hasta cierta edad el riesgo es mínimo, luego conforme avanza la edad el riesgo crece paulatinamente hasta estabilizarse en un valor cercano a uno después de ciertos años); así mismo ocurre típicamente o de manera aproximada con el riesgo de no pagar un crédito conforme aumenta la deuda previa del solicitante (forma-S creciente)

o al aumentar su ingreso (forma-S decreciente). Cuando el comportamiento no corresponde de manera aproximada a una forma-S, se recomienda utilizar otras técnicas distintas a la regresión logística, por ejemplo, árboles de clasificación o los modelos de riesgo aditivo (4).

Para adentrarnos en el conocimiento de la técnica de regresión logística, utilizaremos como referencia los conceptos de la técnica de regresión lineal, ya que la regresión logística utiliza una metodología muy similar, excepto que no son necesarios supuestos de normalidad en la variable de respuesta ni en los residuos (lo cual es una de sus ventajas). Aunque ambas técnicas se basan en un ajuste lineal, la regresión logística utiliza primero una transformación de la variable de respuesta en unidades logarítmicas para deducir el modelo de regresión lineal final. El objetivo es estimar la probabilidad de ocurrencia  $p(x)$  de un evento, dado un conjunto de covariables predictoras  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , ajustadas o controladas a ciertos valores particulares. El modelo matemático de forma-S comúnmente utilizado es la conocida función logística (para más detalles ver las citas (1)-(4)):

$$p(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_i}}$$

Una transformación sencilla en términos de lo que se conoce como razón de ventajas, expresada como el cociente de la probabilidad  $p(x)$  de ser moroso contra la probabilidad de ser cumplido  $1 - p(x)$ , nos lleva al modelo de regresión en unidad logarítmica o función **logit** (del inglés log-unit):

$$\text{logit} \Rightarrow \ln \left[ \frac{p(x)}{1 - p(x)} \right] = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

El cual es ahora un modelo lineal para el que se deben estimar los parámetros  $\beta$ s mediante la técnica de máxima verosimilitud, (1)-(5), en vez de utilizar la técnica de mínimos cuadrados de la regresión lineal. Aunque, cabe mencionar que en el caso particular de la regresión lineal ambas técnicas producen las mismas estimaciones (1). El término entre corchetes en la ecuación anterior, se conoce como la razón de ventaja entre la probabilidad de ocurrencia de un éxito con respecto a la de fracaso, dado un valor de  $x$  particular. Esta razón de ventajas (**odds** de la literatura en inglés) es muy importante ya que nos ayuda a entender la relación entre clientes sujetos o no a un factor de riesgo, como puede ser tener o no dependientes económicos. Por ejemplo, en el caso simple de una variable dependiente predictora dicotómica,  $x$  tiene dependientes económicos, denotando con  $x = 1$  para "sí" y  $x = 0$  para "no"; calculamos la razón de ventajas con ambos valores de  $x$ , al dividir ambos **odds** obtenemos lo que se conoce como el **odds ratio OR** (que representa la proporción en la que la razón de ventaja de estar expuesto a un factor supera a la de no estar expuesto). Por ejemplo, si el  $OR \triangleq \frac{\text{odds}(x=1)}{\text{odds}(x=0)} = 2$ , significa que un cliente con cargas familiares ( $x = 1$ ) tiene 2 veces más riesgo de no pagar el crédito que un cliente que no las tiene ( $x = 0$ ). La interpretación también es válida en estudios



clínicos o epidemiológicos, donde, por ejemplo, se puede decir que el riesgo de contraer el VIH es dos veces mayor en personas drogadictas que las que no lo son. Lo interesante del modelo logístico estriba en que las estimaciones de los coeficientes del modelo de regresión (las  $\beta$ s) sirven a su vez para estimar las **odds ratios** precisamente con la transformación logaritmo inversa, tal que  $\widehat{OR}_i = e^{\beta_i}$ , (esta igualdad es fácil verificarla directamente de la definición anterior del **OR**). Así también para obtener los intervalos de confianza de las **ORs**, se calculan primero los intervalos de confianza de los parámetros  $\beta$ s usando el estadístico Wald, el cual tiene una distribución aproximadamente normal bajo ciertas condiciones, no discutidas aquí ya que utilizaremos los resultados directos del paquete SPSS, ver (1) y (3); después, mediante exponenciación de los límites de los intervalos obtenidos calculamos los intervalos para las **ORs**.



## MODELO DE RIESGO DE MOROSIDAD PARA CRÉDITOS BANCARIOS

Dada la dificultad de vinculación con el sector empresarial para utilizar datos reales, presentamos un caso de estudio simulado sobre créditos bancarios, el cual intenta ampliar los resultados y análisis reportados para regresión logística en (2), ya que los autores comparan la capacidad predictora de un modelo empírico logístico frente a uno de análisis discriminante ([http://www3.unileon.es/pecvnia/pecvnia01/01\\_175\\_199.pdf](http://www3.unileon.es/pecvnia/pecvnia01/01_175_199.pdf)). Nuestro objetivo es determinar que otros factores, además de los reportados en (2), caracterizan la morosidad en las entidades financieras, así como incluir variables adicionales de interés práctico como el *ingreso*, el cual sorprende no se contempla como variable significativa en (2).

Nuestra propuesta incluye las cuatro variables reportadas con significancia estadística, a saber, la variable dependiente dicotómica *Y*, *estatus de la morosidad* ( $Y = 1$  para moroso,  $Y = 0$ , no moroso); y como variables independientes o predictoras: *Destino del crédito* (variable categórica: 0 = "traspaso de negocio"; 1 = "compra de automóvil"; 2 = "otros" el cual incluye compra de vivienda, remodelación, pago de deudas, compra de negocio o

activos para actividad profesional y otros fines); *Nuevo residente en la localidad* (1 = sí, 0 = no); *Número de impagos anteriores* (0, 1, o 2) como variable discreta de razón. A diferencia de los autores de (2) y buscando tener un modelo más realista, incluimos tres variables adicionales consideradas de interés práctico, pero que fueron excluidas por los autores en (2) basados en la poca significancia estadística. Es bien sabido que la capacidad de pago está íntimamente relacionada con el *Ingresos del cliente*, el *número de dependientes económicos* (variable discreta con valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 o más) y su *tipo de empleo*, por lo que son agregadas al modelo.

A continuación utilizaremos la técnica de regresión logística progresiva del paquete SPSS (5) para analizar tanto la significancia estadística mediante la prueba Wald como la prueba de Hosmer-Lemeshow, para analizar qué tan bien se ajustan el modelo a los datos. Una vez que se obtiene la estimación de parámetros, se puede usar el modelo para medir su capacidad predictora, la interpretación de las **ORs** e intervalos de confianza. Para más detalles de justificación y uso de variables ver (2).

Para seleccionar la muestra hipotética de clientes, es importante considerar los tipos de entidades financieras como bancos, cajas de ahorros, cooperativas de crédito. Se recomienda un muestreo por conglomerados en dos etapas donde las unidades primarias sean las entidades y las unidades últimas los clientes (nuestro estudio presupone tal diseño de muestreo). Además, utilizaremos 100 casos en vez de los 72 reportados en (2); es importante notar que para la variable *empleo*, con nueve categorías el tamaño de muestra resulta muy pequeño para confiar estimar sus **ORs**, por lo que se debe tener cuidado con los resultados en casos reales, verificando que los resultados sean consistentes antes de asumirlos como válido, ya que para un usuario con poca experiencia podría pasar desapercibido (4). Asimismo, se debe utilizar un tamaño de muestra suficiente para garantizar que todas las categorías tienen una frecuencia de casos observados distinta de cero, para evitar divisiones con denominadores nulos al calcular los **odds**, en particular la categoría de referencia. Si este no fuera el caso, se recomienda fundir varias categorías adyacentes o similares en algún sentido práctico. Por cierto, esto es una de las posibles desventajas al aplicar regresión logística (4).

## GENERACIÓN DE LA BASE DE DATOS MEDIANTE SIMULACIÓN

La base de datos utilizada (ver apéndice) fue simulada mediante el paquete SPSS. Cabe mencionar que dicha base sirve como conjunto de entrenamiento y prueba para generar el modelo, por lo que la variable morosidad es generada desde un principio para luego contrastarla con el modelo clasificador-pronosticador, una vez que se estiman las probabilidades o riesgo de morosidad. En este sentido, se da por sentado que la base de datos captura una supuesta relación intrínseca entre la variable de respuesta

y los valores de las covariables, los cuales usaremos para generar el modelo inmerso.

Las variables fueron generadas de acuerdo a los siguientes criterios:

$y = \text{Morosidad}$ : Se genera una muestra de números aleatorios con distribución Bernoulli de parámetro  $p = 0.26$  que corresponde a la probabilidad de morosidad reportada en (2).

$x_1 = \text{Destino}$ : Números aleatorios con distribución binomial de parámetros  $n = 2$  y  $p = 0.4$ . Donde 0 = Traspaso de negocio, 1 = compra de automóvil 2 = otras inversiones (casa, local, activos, pago de deudas y otros gastos). Es posible utilizar un esquema discreto distinto a la binomial más realista, sin embargo, no hay pérdida de generalidad usando la binomial.

$x_2 = \text{Nuevo Residente}$ : Variable 0 - 1; muestra de números aleatorios con distribución Bernoulli con  $p = 0.35$ , suponiendo de manera empírica que el 35% son nuevos residentes.

$x_3 = \text{Número Impagos}$ : Variable aleatoria (v. a.) discreta con valores enteros 0, 1 y 2; más de tres impagos suponemos rechazada automáticamente la solicitud de crédito. Se genera mediante una binomial ( $n = 2$ , éxito = número de impagos en su dos operaciones anteriores, con probabilidad general de impago  $p = 0.08$ ). Dicho valor del 8% sólo es de referencia para generar la base, no confundir con la probabilidad de riesgo que buscamos predecir.

$x_4 = \text{Salario}$ : v. a. continua con distribución normal (en miles de pesos) con media 15 y desviación estándar 3. "Promedios" más o menos realistas de ingresos mensuales actuales para un trabajador de clase media-alta.

$x_5 = \text{Empleo}$ : v. a. con 9 categorías, generadas usando Excel con una distribución multinomial de acuerdo a la siguiente tabla de probabilidades propuestas.

Tabla 1. Probabilidades por categorías para la variable Empleo

Número de categoría	Probabilidad	Categoría de empleo
1	0.20	Cuenta propia
2	0.20	Empleado ejecutivo
3	0.24	Empleado indefinido
4	0.14	Empleado eventual
5	0.02	Cuenta propia y empleado ejecutivo
6	0.01	Cuenta propia y empleado indefinido
7	0.05	cuenta propia y empleado eventual
8	0.04	Jubilado o prejubilado
9	0.10	Desempleado

$x_6 = \text{Cargas familiares}$ : variable discreta generada como una v.a. binomial con  $n = 5$   $p = 0.20$ , que representa la probabilidad de tener un hijo. Muchos casos resultaron con 0, 1 ó 2 hijos; lo que concuerda para clientes jóvenes solteros (29%, carga = 0); en su mayoría casados 47% (carga = 1), con un hijo (carga = 2) y no más de dos hijos (carga = 3).

Se debe notar que *cargas familiares* se genera como variable discreta pero simbólicamente se emplea en el modelo como variable continua (en escala de razón) para analizar el aumento del riesgo por cada dependiente económico adicional (incremento unitario), en vez de comparar categorías por cantidad de hijos; o con cargas o sin cargas (dicotómica). Así también el *número de impagos* se emplea internamente como variable continua. Además, la variable *destino del crédito* es de varias categorías y sólo fueron significativas "traspaso de negocio" o "compra de automóvil". Es importante mencionar que los autores en (2) tomaron las categorías como variables independientes, lo cual no resulta congruente al estudiar el modelo. Las categorías de remodelación o compra de vivienda, compra de local o activos para actividad profesional, pagar deudas y otros gastos no fueron variables significativas y se agrupan en la categoría de "otros".

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La base de datos del apéndice fue procesada con SPSS (5); las variables con más de dos categorías (*empleo* y *destino*) fueron codificadas con "celda de referencia" (3), usando 1 para dicha categoría y cero para el resto; la categoría de referencia fue la última y surge cuando todas las demás categorías toman el valor cero. Lo primero es una evaluación general del modelo mediante la prueba  $-2\text{Log de la Verosimilitud}$ , la cual se utiliza para decidir si es el modelo es confiable estadísticamente hablando para predecir la variable de respuesta. El SPSS utiliza como hipótesis nula que el modelo es significativo y, como hipótesis alternativa lo contrario, asumiendo que el estadístico  $-2\text{Log}$  tiene una distribución chi cuadrada con  $k - 2$  grados de libertad. El estadístico  $-2\text{Log}$  resultó 82,880 con 14 grados de libertad y un nivel de significancia de 0.246, por lo tanto, no rechazamos la hipótesis nula de que el modelo logístico en general es significativo como modelo predictor. Analicemos ahora el ajuste de los datos.

La tabla 2 contiene la bondad de ajuste, la cual resulta muy significativa 55.9%. Lo anterior se aprecia en la tabla 3 que muestra la diferencia entre las frecuencias observadas y esperadas muy aproximadas, agrupando los valores de probabilidad estimada en 10 clases percentiles. Para descripción de la prueba de bondad ver (1) y (4).

Tabla 2. Prueba de bondad de ajuste Hosmer y Lemeshow.

	gl	Sig.
6,792	8	0.559



La tabla 4 muestra la clasificación de los casos observados contra los casos pronosticados, dichos resultados se pueden obtener comparando en la tabla del apéndice la primera columna (clase observada), contra la última columna que representa la probabilidad  $p$  de ser clasificado como moroso si dicho valor es mayor que el punto de corte utilizado,  $P_c = 0.15$ . El modelo tuvo una tasa total de pronósticos correctos del 70%, es decir, los pronósticos tanto de morosos como no morosos clasificados de manera correcta con respecto a su clase observada.

Tabla 3. Prueba de Hosmer y Lemeshow para frecuencias observadas y esperadas.

		Si el crédito fue pagado o no = No moroso		Si el crédito fue pagado o no = Moroso		Total
		Observado	Esperado	Observado	Esperado	
Paso	1	10	9.819	0	0.181	10
	2	10	9.556	0	0.444	10
	3	9	9.319	1	0.681	10
	4	10	9.146	0	0.854	10
	5	10	8.852	0	1.148	10
	6	7	8.226	3	1.774	10
	7	7	7.521	3	2.479	10
	8	5	6.909	5	3.091	10
	9	6	6.117	4	3.883	10
	10	6	4.536	4	5.464	10

Tabla 4. Clasificación-predicción del modelo.

Observado	Pronosticado		Porcentaje correcto
	No moroso	Moroso	
No moroso	51	29	63.8
moroso	1	19	95.0
Porcentaje global			70.0

La tasa de clasificación de verdaderos negativos (no morosos pronosticados como no morosos) fue del 63%; mientras que la tasa más relevante en este caso, clasificar correctamente a los clientes morosos (verdaderos positivos) fue de 95%, demostrando gran capacidad predictiva del modelo. Cabe mencionar que el  $P_c$  se eligió con base en la experiencia de la simulación, sin embargo, formalmente se puede seleccionar usando la llamada curva de características de operación o curva **ROC** (Receiver Operating Characteristic), consultar (1) y (3).

Tabla 5. Estadísticas para el modelo de regresión logística.



	B	E.T.	Wald	gl	Sig.	Exp(B)	I.C. 95% para EXP(B)	
							Inferior	Superior
Destino			1.602	2	0.449			
Destino (1)	0.897	0.782	1.316	1	0.251	0.408	0.088	1.888
Destino (2)	0.715	0.687	1.086	1	0.297	0.489	0.127	1.878
Nuevo residente	1.096	0.687	2.543	1	<b>0.111</b>	0.334	0.087	1.285
No. de impagos	1.307	0.568	5.294	1	<b>0.021</b>	3.696	1.214	11.255
Salario	0.217	0.098	4.872	1	<b>0.027</b>	0.805	0.664	0.976
Cargas	0.207	0.334	0.385	1	0.535	1.231	0.639	2.370
Empleo			1.882	8	0.984			
Empleo (1)	0.483	1.052	0.211	1	0.646	0.617	0.078	4.850
Empleo (2)	0.507	1.084	0.219	1	0.640	0.602	0.072	5.044
Empleo (3)	0.540	1.104	0.240	1	0.625	0.583	0.067	5.069
Empleo (4)	0.318	1.080	0.087	1	0.769	1.374	0.166	11.400
Empleo (5)	19.286	25577.4	0.000	1	0.999	0.000	0.000	
Empleo (6)	0.939	1.567	0.359	1	0.549	2.557	0.119	55.122
Empleo (7)	18.062	40192.9	0.000	1	1.000	0.000	0.000	
Empleo (8)	0.527	1.595	0.109	1	0.741	0.590	0.026	13.452
Constante	2.402	1.719	1.952	1	0.162	11.043		

Nota. El número entre paréntesis en el nombre de cada variable indica su categoría.

La tabla 5 contiene en la columna B la estimación de los coeficientes  $\beta$ s del modelo y el estadístico de prueba en la columna Wald, el cual es un indicador para probar la significancia (Sig.) estadística de cada variable (1), en este caso se utilizó un nivel de significancia del 5%. Se observa en la sexta columna que las variables significativas fueron *número de impagos previos* y el *salario*; mientras que la variable *nuevo residente* es significativa al 12%. La variable *empleo* no resulta significativa en ninguna de sus nueve categorías. Cabe mencionar que se hicieron pruebas eliminando estas variables del modelo, sin embargo, su desempeño fue más pobre, por lo que se mantuvieron. La tabla 5 también incluye las estimaciones de interés de las **ORs** y cuya interpretación se da más abajo; además, se incluyen sus intervalos de confianza con propósitos ilustrativos; para una discusión más amplia ver (1), (3) y (4). Observe que los coeficientes  $\beta$ s negativos implican

un OR menor a 1 como indicador de disminución del riesgo a medida que aumenta la variable predictora; un coeficiente  $\beta$  positivo mucho mayor que cero no influirá en el cálculo de la probabilidad, mientras que un valor negativo mucho menor que cero producirá por sí sola una probabilidad estimada aproximadamente cero. Lo anterior debido al cambio de signo en la función **logit**.

Si usamos los coeficientes estimados de la tabla 5, columna B, y los valores de las variables para cada caso en la base de datos simulada, podemos estimar la probabilidad o riesgo de morosidad de cada cliente mediante el modelo de regresión logística. Por ejemplo, los cálculos para el caso 1 muestran el valor de predicción de riesgo de morosidad siguiente:

Caso	Morosidad	Destino	Nuevo residente	Número de impagos	Salario	Empleo	Cargas	Predicción
$X_1$	0	0	0	0	18.047	2	1	0.0623
$X_2$	1	0	1	0	12.040	1	1	0.0773

Predicción de riesgo de morosidad para el caso 1:

$$P(X_1) = \frac{1}{1 + \exp[-(2.402 - 0.897 \times \text{Destino}(1) - 0.217 \times \text{Salario} - 0.507 \times \text{Empleo}(2) + 0.207 \times \text{Cargas})]}$$

$$P(X_1) = \frac{1}{1 + \exp[-(2.402 - 0.897 \times 1 - 0.217 \times (18.047) - 0.507 \times 1 + 0.207 \times 1)]} = 0.0623$$



Observe que el caso 1 representa datos de un cliente no moroso, cuyo destino del crédito fue para compra de automóvil, no es nuevo residente, no tiene impagos previos, tiene un salario elevado y con una carga familiar, el cual podríamos decir que es un perfil típico de un buen cliente. Observe que la probabilidad estimada por el modelo resultó menor que el  $P_c = 0.15$ , por lo que este primer caso es clasificado de manera correcta como cliente no moroso. Es necesario aclarar que en la variable *destino* la codificación de categoría de referencia es la última, en este caso la tercera categoría "otros"; así, la categoría 0 representa a "traspaso de negocio" mientras que la categoría 1 representa "compra de automóvil", esto explica por qué se usó el se usó el valor uno para indicar la variable destino(1) en el cálculo anterior. Las probabilidades restantes se calculan de manera similar y se muestran en la columna 8 del apéndice. Debido a que la probabilidad estimada para los primeros dos casos es menor que el  $P_c = 0.15$ , estos serán pronosticados no morosos, sin embargo, según los datos del apéndice, observe que el segundo caso corresponde en realidad a un cliente moroso, por lo que la clasificación del modelo para este caso es incorrecta, de hecho es el único "caso extremo-moroso" presente en los datos simulados.

El valor 3.696 en la columna Exp (B) nos dice que por cada crédito impagado (incremento unitario) el riesgo de no devolver el crédito aumenta 3.696 veces. Asimismo, vemos que por cada \$ 1,000 de incremento (unitario) en el salario, el riesgo (multiplicativo) de no pagar el crédito disminuye un 80.5%; es decir, si un cliente con un salario determinado presenta un riesgo del 50%, si mantenemos fijas todas las variables pero incrementamos el salario en \$1,000, el riesgo (multiplicativo) se reduce aproximadamente al 40%; aún más, si el salario aumenta en incrementos de \$ 5,000, el riesgo se reduce hasta un  $e^{5 \times (-0.217)} \times 100 \approx 34\%$ . También vemos una correlación negativa en el renglón de nuevo residente, por lo tanto, el  $OR = 0.334$  significa que los nuevos residentes (categoría 1) tienen una disminución del riesgo por un factor de 33.4% comparado con un residente antiguo.

## CONCLUSIONES

Se mostró que un modelo de regresión logística para pronosticar la morosidad de un crédito bancario se desempeña adecuadamente como modelo clasificador sobre una base de datos simulada; en consecuencia, se asume factible que este tipo de modelos sea adecuado sobre casos reales o similares. El estadístico  $-2\text{Log de Verosimilitud}$  mostró que en general el modelo es un buen predictor; además, se mostró que se ajusta bien a los datos, tanto en las frecuencias observadas contra las esperadas. Se obtuvo un excelente desempeño del 95% para predecir particularmente posibles clientes morosos. La tasa de predicción global del modelo fue buena de acuerdo a la literatura estándar, ya que se ajusta a un 70% de clasificaciones correctas. Las variables más significativas para pronosticar el riesgo de morosidad son *número de impagos previos*, *salario* y *nuevo residente*. Sorprende que la variable número de dependientes económicos o *carga familiar* resultó no significativa. Es importante recalcar que el modelo fue contrastado con los datos simulados, la metodología aquí presentada se puede ver como referencia para un trabajo futuro más realista, en tal caso, se debe tener cuidado en validar primero la base de datos mediante el estudio de las distribuciones adecuadas, así como validación final del modelo, o mejor aún, usar una base de datos reales.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Hosmer, D.W. and Lemeshow, S. (2000). *Applied Logistic Regression*. Second edition. Wiley series in probability and statistics.
- 2) Mures, Q. J., García G., A. y Vallejo P., E. (2005). *Aplicación del análisis discriminante y regresión logística en el estudio de la morosidad en las entidades financieras*. Comparación de resultados. Pecnia, vol. 1, pp. 175–199. Recuperado el 25 de enero de 2013. [http://www3.unileon.es/pecvnia/pecvnia01/01\\_175\\_199.pdf](http://www3.unileon.es/pecvnia/pecvnia01/01_175_199.pdf)
- 3) Kleinbaum, D.G. and Klein, M. (2010). *Logistic Regression a Self-Learning Text*. Third edition. Springer.
- 4) Vittinghoff, E., Shiboski, S., Glidden, D. and McCulloch, Ch. (2004). *Regression methods in biostatistics: Linear, Logistic, Survival, and Repeated Measures models*. Springer.
- 5) Pérez L, C. (2009). *Técnicas de Análisis de datos con SPSS*. Pearson Prentice Hall.



### APÉNDICE: Base de datos simulados para el modelo de riesgo para créditos bancarios

La siguiente tabla contiene la base de datos para 100 clientes obtenida mediante simulación para generación del modelo; dichos datos pueden ser recuperados del repositorio [ftp.mat.uson.mx/~claudio](http://ftp.mat.uson.mx/~claudio) o replicando el

experimento descrito en la sección de simulación, por lo que pueden omitirse (se incluyen para propósitos de revisión). El significado de cada variable  $x_1, \dots, x_6$  en esta tabla es como se definió también en la sección de simulación.

CASO	y	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	p
1	0	0	0	0	18.047	2	1	0.062
2	1	0	1	0	12.040	1	1	0.077
3	1	2	0	0	16.237	3	0	0.159
4	1	0	1	2	11.670	8	0	0.491
5	0	2	0	0	11.674	8	1	0.389
6	0	0	0	0	17.786	9	0	0.087
7	0	1	1	0	12.591	1	1	0.082
8	0	1	1	0	19.416	3	2	0.023
9	0	1	1	0	18.149	8	1	0.025
10	0	1	0	0	18.223	1	1	0.073
11	0	1	0	1	18.504	2	1	0.210
12	1	0	0	0	13.499	1	3	0.217
13	0	0	0	0	17.870	1	2	0.080
14	0	1	1	0	15.187	1	2	0.059
15	1	2	0	1	15.064	2	1	0.535
16	0	0	1	1	16.303	1	2	0.131
17	0	1	1	0	11.882	2	2	0.111
18	0	1	0	0	14.164	2	0	0.131
19	0	1	0	0	19.224	3	1	0.056
20	0	2	1	0	14.898	2	1	0.097
21	0	2	1	2	16.009	2	3	0.637
22	0	1	0	1	14.273	2	1	0.401
23	0	2	1	0	17.359	9	1	0.095
24	0	2	1	0	14.648	3	2	0.120

25	0	2	0	0	14.670	3	2	0.288
26	0	2	0	0	18.162	2	1	0.137
27	0	1	1	0	14.665	9	0	0.070
28	0	0	0	0	12.902	6	0	0.412
29	0	0	1	0	14.998	9	1	0.067
30	0	0	0	0	16.723	2	3	0.118
31	0	1	1	0	9.532	9	1	0.219
32	0	0	0	0	19.690	1	1	0.046
33	0	0	0	0	19.003	4	1	0.110
34	0	1	1	0	18.157	7	1	0.000
35	0	1	1	0	12.634	9	0	0.104
36	0	2	0	0	13.190	3	1	0.312
37	1	1	0	0	10.977	2	1	0.270
38	0	1	1	0	15.974	4	0	0.072
39	0	1	0	0	8.435	2	1	0.391
40	1	0	0	1	19.495	4	1	0.291
41	0	1	0	0	10.081	1	2	0.362
42	1	2	1	1	12.900	1	1	0.387
43	0	1	1	0	11.973	1	0	0.077
44	1	1	0	0	11.791	2	3	0.319
45	1	1	0	0	9.493	3	1	0.331
46	0	1	0	0	16.614	3	0	0.079
47	0	0	0	0	21.478	2	0	0.025
48	0	0	1	0	16.410	9	0	0.041
49	0	1	0	0	17.417	1	1	0.086
50	0	0	1	0	11.378	2	1	0.086





CASO	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	p
51	0	1	0	0	15.738	1	1	0.119
52	0	2	0	0	13.236	9	1	0.435
53	0	1	0	0	20.430	1	0	0.038
54	0	0	0	0	18.996	2	2	0.063
55	0	1	1	0	15.202	4	0	0.084
56	1	2	1	0	13.897	4	0	0.200
57	1	0	0	0	15.180	6	2	0.393
58	0	2	0	1	14.107	4	0	0.724
59	0	1	1	0	18.942	1	1	0.022
60	0	2	1	0	11.621	1	2	0.217
61	0	1	1	0	14.255	4	1	0.122
62	1	2	0	0	8.636	3	1	0.549
63	0	1	0	0	16.943	1	0	0.078
64	0	0	1	0	14.780	3	0	0.034
65	0	1	0	0	9.368	3	0	0.292
66	0	1	0	0	10.685	4	1	0.473
67	0	0	1	0	16.899	3	3	0.040
68	0	1	0	0	11.260	1	1	0.263
69	1	1	0	0	15.588	9	1	0.184
70	1	1	0	0	15.846	4	1	0.227
71	0	2	0	0	15.867	3	1	0.202
72	0	0	0	0	12.786	5	1	0.000
73	0	1	0	0	18.653	6	0	0.195
74	0	1	0	0	16.254	2	1	0.105

75	0	0	1	0	17.215	1	2	0.033
76	0	1	1	0	14.737	8	2	0.062
77	0	2	0	0	14.829	1	1	0.252
78	0	1	1	2	13.515	1	1	0.500
79	0	1	0	0	9.134	4	0	0.506
80	1	1	0	0	13.026	4	0	0.305
81	0	0	1	0	20.691	9	1	0.020
82	1	1	0	0	11.900	9	2	0.382
83	0	0	0	0	10.958	9	0	0.295
84	0	2	1	0	17.839	3	0	0.043
85	0	1	1	0	16.289	3	1	0.036
86	0	0	0	0	9.525	4	3	0.594
87	0	0	1	1	9.693	3	1	0.328
88	0	0	1	1	12.044	1	0	0.201
89	1	1	1	1	11.075	1	1	0.314
90	0	1	1	0	21.458	5	0	0.000
91	0	1	1	0	20.250	4	3	0.054
92	0	0	0	0	15.661	4	2	0.239
93	0	0	1	0	11.040	3	2	0.108
94	0	2	0	0	13.975	1	1	0.288
95	0	1	0	0	22.888	8	2	0.033
96	1	2	1	2	16.564	2	0	0.455
97	1	2	0	0	13.065	2	1	0.327
98	0	2	0	0	16.596	2	0	0.154
99	0	1	1	0	14.478	2	1	0.055
100	0	0	0	1	14.315	2	0	0.310



## UNA APROXIMACIÓN AL COMPORTAMIENTO DE LOS VALORES DE LA VIVIENDA: CASO HERMOSILLO

JESÚS QUINTANA PACHECO\*, ARTURO OJEDA DE LA CRUZ, JUAN ARCADIO SAIZ HERNÁNDEZ, ANA CECILIA BORBÓN ALMADA, ISRAEL MIRANDA PASOS, JESÚS ALBERTO ESQUER ARMIENTA

*El comportamiento de los precios de la vivienda en la ciudad es un fenómeno que puede ser explicado a partir de las características intrínsecas y extrínsecas de la vivienda como son: la superficie construida, la calidad de los materiales, el proyecto, el estado de conservación, la antigüedad, la localización, la accesibilidad, entre otras. Este trabajo aborda la aportación de estos elementos, utilizando la técnica de los modelos de precios hedónicos en una muestra del mercado de ventas en la ciudad de Hermosillo. El análisis proporciona cinco modelos que explican los precios de venta en estos cinco sectores en que se divide el mercado de la ciudad, donde las principales variables que definen el valor son "la calidad de la vivienda" y "superficie construida" y en menor proporción "la accesibilidad a centro de comercio" y "calidad de los servicios e instalaciones".*

DR. JESÚS QUINTANA PACHECO  
Universidad de Sonora, Departamento de Ingeniería Civil y Minas  
Correo: quintana@dicym.uson.mx  
M.C. ARTURO OJEDA DE LA CRUZ  
Universidad Autónoma de nuevo León, Doctorando  
Correo: ojeda@dicym.uson.mx  
DR. JUAN ARCADIO SAIZ HERNÁNDEZ  
Universidad de Sonora, Departamento de Ingeniería Civil y Minas  
Correo: jsaiz@dicym.uson.mx  
DRA. ANA CECILIA BORBÓN ALMADA  
Universidad de Sonora, Departamento de Ingeniería Civil y Minas  
Correo: acborbon@dicym.uson.mx  
DR. ISRAEL MIRANDA PASOS  
Universidad de Sonora, Departamento de Ingeniería Civil y Minas  
Correo: imiranda@dicym.uson.mx  
M.C. JESÚS ALBERTO ESQUER ARMIENTA  
Universidad de Sonora, Dirección de Infraestructura  
Correo: jaesquer@admvos.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Jesús Quintana Pacheco  
Correo electrónico: quintana@dicym.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 8 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN

El intercambio de los bienes inmuebles se desarrolla principalmente en un mercado secundario notablemente imperfecto, donde la opacidad de los precios de operación son la constante y sin embargo sus participantes deben decidir los montos en que se intercambian los bienes inmuebles; así también, el mercado primario es desarrollado por un reducido grupo de oferentes, dificultando al comprador la elección a partir de una limitada gama de características del inmueble.

La ausencia de criterios objetivos que ayuden en la identificación de los elementos que definen estos valores es motivo para que los precios iniciales de oferta confundan a los participantes y generen ineficiencias en la realización de sus operaciones de compra-venta. En este sentido es importante estudiar el comportamiento del mercado en relación con los atributos principales de los inmuebles; esto visto desde la perspectiva del comprador que define su disposición a pagar por estas características del bien (1).

La adquisición de inmuebles habitacionales puede deberse a motivaciones diferentes en el individuo: la principal, solucionar su necesidad de abrigo ante la naturaleza, pero también, de los inconvenientes que genera el convivir en concentraciones humanas, como es la necesidad creada de intimidad; así también, la adquisición de la segunda residencia como una oportunidad para cambiar su entorno por otro normalmente diferente que le ayude a disfrutar mejor sus momentos de ocio; y finalmente, pero no menos importante, la adquisición de inmuebles habitacionales con el propósito de obtener ingresos futuros que le permitan conservar el valor original del capital invertido y obtener un monto adicional (renta).

La aplicación de la técnica de modelos de precios hedónicos presenta la característica de explicar el comportamiento del precio de los bienes inmuebles a partir de los precios de los diferentes atributos que lo conforman. Esto significa que las viviendas se constituyen de una serie de elementos que las hace atractivas para sus compradores y los precios de estos elementos pueden ser estimados a partir de información del mercado. Así pues, conociendo dichos elementos es posible explicar y construir el precio de cada una de las viviendas del lugar.

Lo anterior permite mostrar cómo los precios de las viviendas en la ciudad son resultado de un conjunto de características intrínsecas y extrínsecas propias de cada inmueble, las cuales es posible establecer y modelar estadísticamente en el espacio urbano (2). Para esto se desarrollan los modelos que explican el comportamiento de los precios de la vivienda y se muestran los principales elementos que proporcionan valor a las viviendas en cada sector.

## CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La *formación espacial de los valores urbanos* puede definirse con base en la teoría económica espacial; esto, a partir de la formación espacial de los valores urbanos del

mercado residencial, en donde es posible identificar tres componentes principales: la accesibilidad, las externalidades físicas y ambientales y los factores sociales.

La *accesibilidad* se define como la característica que presenta el inmueble dentro del territorio urbano, la cual permite al individuo tener desplazamientos más cortos o de menor tiempo a los lugares de interés, normalmente al centro de trabajo, de educación o equipamientos generales de la ciudad (3). La accesibilidad puede medirse a partir de la distancia euclidiana, la distancia de recorrido o el tiempo de traslado entre dos puntos de la ciudad y es normalmente asociada como un factor importante de influencia en el valor del inmueble (4).

El crecimiento de las ciudades genera *externalidades físicas y ambientales*, positivas como son las economías de aglomeración y negativas como la presencia de polución, congestión vehicular, disminución del espacio verde, entre otras; elementos que presentan efectos importantes en el comportamiento de los valores de los inmuebles urbanos (5).



Por esto, los entornos urbanos bien planeados y ejecutados, que consideran aspectos tecnológicos, del medio ambiente y edificaciones de calidad, que armonizan las características de la zona, son productos inmobiliarios cada vez más preferidos por el consumidor.

La ubicación de la vivienda en una zona ocupada por individuos con alto nivel de renta, niveles educativos elevados o excelente nivel cultural, favorece de forma importante el incremento del valor de las viviendas (6). Es decir, el atractivo de una zona suele estar ligado a diferentes fenómenos económicos y sociales que generan atracción y disposición del comprador a pagar más por la vivienda; lo anterior, es producto principal de la imagen de *jerarquía social* asociada al lugar.



## METODOLOGÍA

### Objeto de estudio

El área de estudio debe ser un referente importante que pueda ser ubicado fácilmente, que facilite el acceso a la información necesaria para desarrollar la metodología, que presente características similares a las supuestas en la hipótesis y, sobre todo, que sea de interés para el investigador (Figura 1).



Figura 1. Ciudad de Hermosillo, Sonora, México.

Fuente: Google Earth.

El sitio y objeto de estudio seleccionado es el mercado de venta de vivienda de la ciudad de Hermosillo, Sonora, México; se localiza 29°05'56" de latitud N y 110°57'15" de longitud O con una altitud de 216 msnm (Figura 2) en una mancha urbana sensiblemente plana de 160.93 km<sup>2</sup>, donde 125.68 km<sup>2</sup> corresponden a superficies de lotes y predios urbanos, de los cuales el 37.25% se encuentran baldíos (7).



Figura 2. Distribución de lotes baldíos y edificados.

Fuente: Programa de Desarrollo Urbano del Centro de Población de Hermosillo (2006).

El municipio de Hermosillo registra una población de 784,342 habitantes y un mercado de vivienda compuesto por 213,304 viviendas particulares habitadas, donde el 95.24% posee agua entubada, el 94.59% sistema de drenaje y el 97.49% servicio de energía eléctrica (8).

### Bases de datos

Se recolecta información de operaciones de vivienda directamente en campo, en prensa, en portales electrónicos, con profesionales de la valuación y unidades de valuación, integrando una base de 450 inmuebles distribuidos en la ciudad. En éstos se describen características como:

- ❖ Precio de oferta.
- ❖ Superficie de construcción.
- ❖ Superficie de terreno.
- ❖ Número de recámaras.
- ❖ Número de baños.
- ❖ Número de plantas.
- ❖ Calidad de los servicios e instalaciones.
- ❖ Cercanía a vialidad principal.
- ❖ Cercanía a centro comercial.
- ❖ Cercanía al centro de población.
- ❖ Número de huellas de cochera.

Además se agrega información de la Dirección de Catastro Municipal Hermosillo correspondiente a los valores catastrales de los terrenos urbanos de la ciudad, a partir de la cual se integran los atributos de valores de terrenos por zona homogénea y por banda de valor vigentes al 2012.

### Sectorización de la ciudad

Parece prudente utilizar la subdivisión oficial de la ciudad de Hermosillo, correspondiente a 450 colonias, como las subdivisiones del mercado de la vivienda; sin embargo la pulverización del territorio con esta sectorización dificulta enormemente su utilización en el estudio. Así también, se explora la denominación oficial de las 97 regiones catastrales del municipio de Hermosillo; aun así, después de una simple inspección se observa que no representan zonas homogéneas en cuanto a características de calidad de las viviendas.

Buscando una subdivisión del mercado de la vivienda que permita obtener modelos con grados de explicación aceptables, se procede a utilizar información oficial de la Dirección de Catastro Municipal de Hermosillo (9) relativa a los valores catastrales del suelo por zona homogénea, se procede a sectorizar en regiones de valores de suelo definidas a partir de quintiles, es decir, realizando una distribución equitativa de colonias por cinco rangos de valores catastrales del suelo.

Con base en esta clasificación, se presenta la ciudad de Hermosillo dividida en sectores de rangos de valores catastrales de suelo, las cuales se muestran en la figura 3.

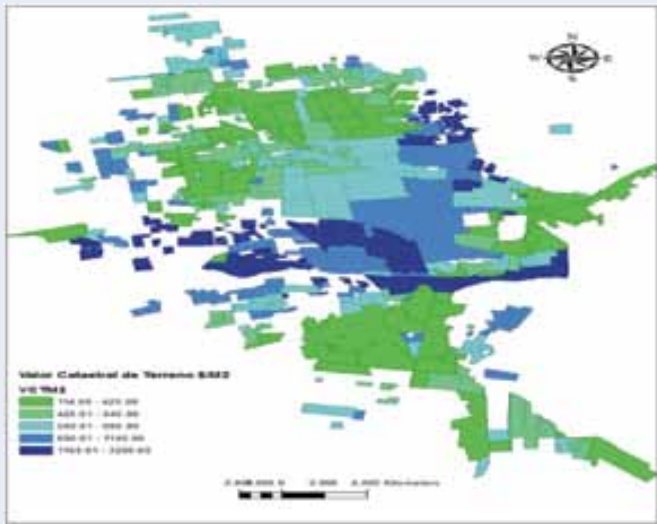


Figura 3. Sectorización de la ciudad de Hermosillo.

En la figura 3 es posible observar comportamientos consistentes con la teoría de formación espacial de submercados de los valores inmobiliarios, es decir diferencias en valores para una misma característica de un sector a otro (10). Así también, las figuras 4, 5, 6, 7 y 8 muestran correlaciones lineales aceptables entre la superficie construida y los precios de venta en los diferentes sectores.

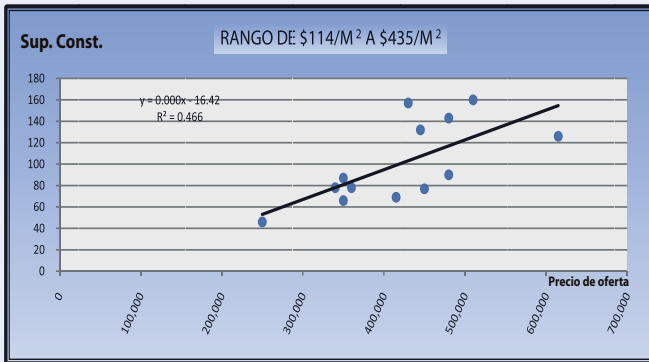


Figura 4. Relación entre la superficie construida y el precio de venta.

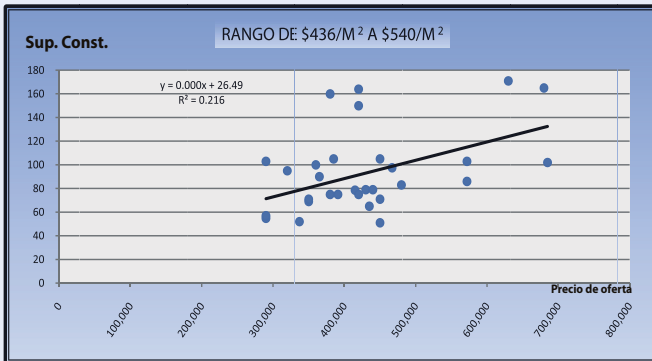


Figura 5. Superficie construida contra precio de venta.

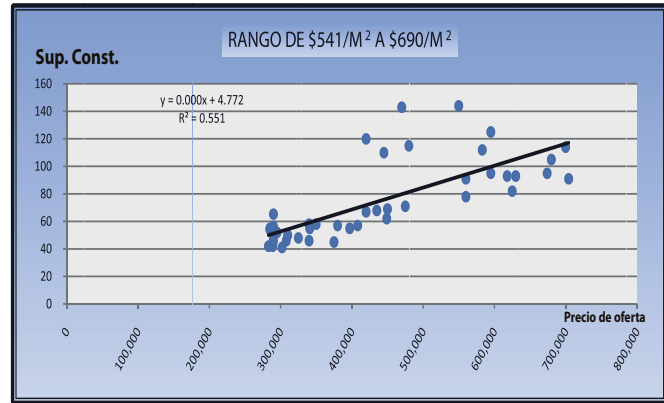


Figura 6. Relación entre la superficie construida y el precio de venta en rango de \$541 a \$690/m<sup>2</sup>.

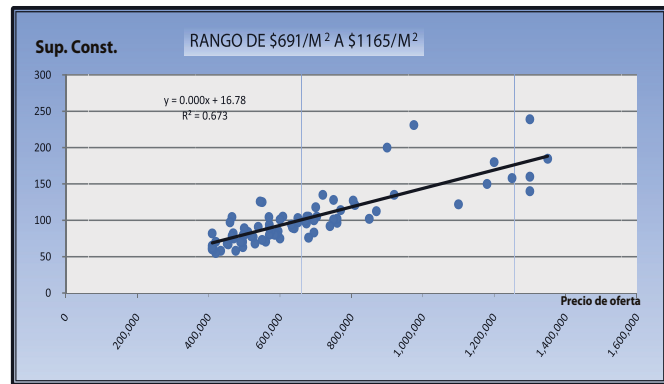


Figura 7. Superficie construida y precio de venta en rango de \$691 a \$1165/m<sup>2</sup>.

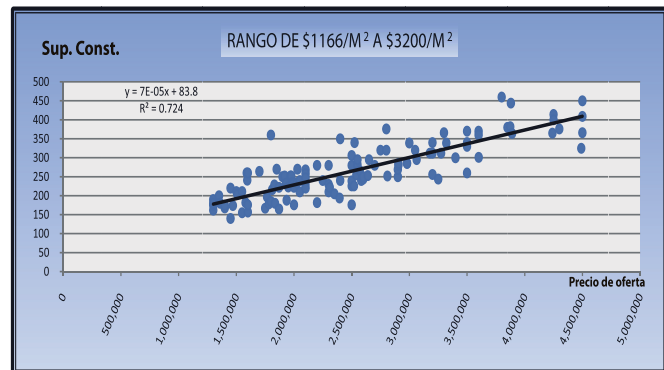


Figura 8. Relación entre la superficie construida y el precio de venta en rango de \$1166 a \$3200/m<sup>2</sup>.

Los índices de correlación mayores parecen asociarse a inmuebles ubicados en sectores de valores catastrales altos, lo que deja entrever que los valores catastrales bajos corresponden a edificaciones más heterogéneas propias de los procesos de autoconstrucción donde las expectativas de valores de venta suelen caracterizarse por una alta variabilidad.



## MODELOS EXPLICATIVOS DEL VALOR DE LA VIVIENDA

Los modelos de precios hedónicos inician su gestación con el trabajo de Hass en 1922, quien intenta obtener el valor de tierras dedicadas a la actividad agrícola; posteriormente Court, en 1939, realiza una aplicación para obtener precios en el mercado automovilístico; Rosen en 1974 realiza una aplicación en el mercado inmobiliario, donde conceptualiza el bien inmueble a partir de un conjunto de atributos que satisfacen las diferentes necesidades o gustos de la demanda, es decir, un bien inmueble urbano que está compuesto por una serie de características deseables por el comprador, las cuales pueden integrarse en la siguiente ecuación:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \dots + \beta_n X_n + e$$

Donde:

- $Y$  variable dependiente (valor del inmueble).
- $X$  variable independiente (característica del inmueble).
- $\beta$  coeficiente de la variable producto del modelo de regresión.
- $e$  error de estimación del modelo.

La solución de la expresión del modelo propuesto se lleva a cabo con la aplicación de la técnica de regresión lineal múltiple aproximada por mínimos cuadrados ordinarios. Este proceso se lleva a cabo con el programa estadístico SPSS 18, donde se aplica la técnica de pasos sucesivos (*stepwise*). Además se revisan las condiciones que debe cumplir un buen modelo, como es el comportamiento normal de la variable dependiente, valores adecuados de multicolinealidad, relaciones lineales y coeficientes significativos, comportamiento homocedástico, entre otros.

## RESULTADOS

### MPH del Sector I de \$114.00 a \$ 435.00

P.V.= -23,063.68 + 118,618.63 C. Vivienda + 968.16 S. Construida

El modelo resultante con una explicación del 74% del precio de venta, se fundamenta en dos variables la *Calidad de la vivienda* y la *superficie construida*. La *Calidad de la vivienda* con un coeficiente  $\beta$  tipificado de 0.630, mientras que la *Superficie construida* con  $\beta$  tipificado de 0.394; esto es la *Calidad de la vivienda* es la principal característica que define el valor de la vivienda seguida de la *Superficie construida*.

El modelo muestra que el incremento de 1 nivel de *Calidad de la vivienda*, incrementa el precio aproximadamente en \$118,000.00, mientras que cada  $m^2$  de *Superficie construida* tiene un impacto de \$968.16 en el precio. Por otro lado, la pregunta obligada ¿Qué sucede con el resto de las variables independientes? son variables que no se incluyen en el modelo debido a que presentan una significancia pobre en el comportamiento del valor de la vivienda, o bien, presentan colinealidad con las variables independientes seleccionadas.

### MPH del Sector II de \$436.00 a \$540.00

P.V.= -54,472.198 + 120,944.05C. Vivienda + 33,512.08A. Centro Comercial

El modelo resultante con una explicación del 54% del valor de la vivienda se fundamenta en dos variables, la *Calidad de la vivienda* y la *Accesibilidad a centro comercial*. La *Calidad de la vivienda* con un coeficiente  $\beta$  tipificado de 0.722, mientras que la *Accesibilidad a Centro comercial* con  $\beta$  tipificado de 0.281; esto es la *Calidad de la vivienda* es la característica principal en la definición del valor de la vivienda y en menor grado la *Accesibilidad a Centros comerciales*.

El modelo muestra que el incremento de 1 nivel de *Calidad de la vivienda*, incrementa el precio en aproximadamente \$120,944.00, mientras que cada nivel de *Accesibilidad a Centro comercial* tiene un impacto de \$33,512.06 en el precio. El resto de las variables tienen un comportamiento similar al del modelo anterior.

### MPH del Sector III de \$541.00 a \$ 690.00

P.V.= -51,581.44 + 132,570.41 C. Vivienda + 1,545.56 S. Construida



El modelo resultante con una explicación del 85% del precio de venta, se fundamenta en dos variables, la *Calidad de la Vivienda* y la *Superficie construida*. La *Calidad de la vivienda* con un coeficiente  $\beta$  tipificado de 0.690, mientras que la *Superficie construida* con  $\beta$  tipificado de 0.332; esto es la *Calidad de la vivienda* es la principal característica que define el valor de la vivienda seguida de la *Superficie construida*.

El modelo muestra que el incremento de 1 nivel de *Calidad de la vivienda*, incrementa el precio en aproximadamente \$132,570.41, mientras que cada m<sup>2</sup> de *Superficie construida* tiene un impacto de \$1,545.56 en el precio. El resto de las variables tienen un comportamiento similar al de los modelos anteriores.

### MPH del Sector IV de \$ 691.00 a \$ 1,165.00

P.V.= -193,782.99 + 118,028.44 C.Vivienda + 4,224.34 S.Construida

El modelo resultante con una explicación del 73% del precio de venta, se fundamenta en dos variables, la *Calidad de la vivienda* y la *Superficie construida*. La *Superficie construida* con un coeficiente  $\beta$  tipificado de 0.654, mientras que la *Calidad de la vivienda* con  $\beta$  tipificado de 0.297; esto es, en este sector la *Superficie construida* es la principal característica que define el valor de la vivienda seguida de la *Calidad de la vivienda*.

El modelo muestra que el incremento de 1 nivel de *Calidad de la vivienda*, incrementa el precio en aproximadamente \$118,000.00, mientras que cada m<sup>2</sup> de *Superficie construida* tiene un impacto de \$4,224.00 en el precio. El resto de las variables tienen un comportamiento similar al de los modelos anteriores.

### MPH del Sector V de \$ 1,166.00 a \$ 3,200.00

P.V.= -236,175.94 + 151,666.05 C. Servicios e Instal.+ 8,606.98 S. Construida

El modelo resultante con una explicación del 77% del precio de venta, se fundamenta en dos variables, la *Calidad de servicios e instalaciones* y la *Superficie construida*. La *Superficie construida* con un coeficiente  $\beta$  tipificado de 0.731, mientras que la *Calidad de servicios e instalaciones* con  $\beta$  tipificado de 0.249; esto es la *Superficie construida* es la principal característica que define el valor de la vivienda y en segundo lugar la *Calidad de servicios e instalaciones*.

El modelo muestra que el incremento de 1 nivel de *Calidad de servicios e instalaciones*, incrementa el precio en aproximadamente \$151,666.00, mientras que cada m<sup>2</sup> de *Superficie construida* tiene un impacto de \$8,607.00 en el precio. El resto de las variables tienen un comportamiento similar al de los modelos anteriores.

## CONCLUSIONES

Los resultados muestran que es posible explicar el precio de la vivienda en la ciudad de Hermosillo a partir de la aplicación de modelos de precios hedónicos, si bien el grado de explicación de los cinco modelos presentan

diferentes aproximaciones, es posible mejorar su explicación y uniformidad utilizando una base informativa más amplia del mercado inmobiliario de la vivienda en la ciudad.

El comportamiento de los valores de la vivienda en la ciudad puede ser explicado fundamentalmente con base en la *Calidad de la vivienda*, sobre todo en los sectores I, II y III, mientras que la *Superficie construida* es el elemento principal que caracteriza el precio en los sectores IV y V. Esto es, la calidad de los materiales utilizados en la edificación y el proyecto arquitectónico, son los elementos predominantes en los sectores I, II y III, mientras que el tamaño de las viviendas es fundamental en los sectores IV y V.

Lo anterior parece indicar que el valor de los sectores bajos (I, II y III) queda definido en primera instancia por la calidad de los materiales y proyecto, mientras que los niveles altos, consideran esto invariante y las diferencias de valor están fundamentadas por la superficie construida.

Por otro lado, es importante destacar que siendo la ciudad de Hermosillo una urbanización extendida, la accesibilidad al centro de la ciudad, vialidad principal y centro comercial, no muestran una importancia significativa. Lo anterior puede deberse a la existencia de diferentes puntos importantes en la ciudad, premisa bajo la cual parece desarrollarse y crecer, restando importancia al centro histórico y de oficinas públicas. Otra razón puede ser, la notable presencia de transporte privado en las familias de la ciudad, que prioriza el uso del automóvil sobre la accesibilidad de la vivienda.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Rosen, S. (1974). *Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure competition*. Journal of Political Economy, n. 82: 34-55.
- 2) Roca, C. J. (1988). *La estructura de valores urbanos: un análisis teórico-empírico*. Instituto de Estudios de Administración Local, Madrid.
- 3) Alonso, W. (1964). *Location and land use*. Harvard University Press, Cambridge.
- 4) Von Thünen, J. H. (1826). *Der Isoliert Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationaloökonomie*. Hamburgo.
- 5) Marshall, A. (1890). *Principles of Economics*. Macmillan and Co. Ltd, London, England.
- 6) Halbwachs, M. (1909). *Les expropriations et le prix des terrains à Paris (1860-1900)*, Paris.
- 7) Gobierno Municipal de Hermosillo (2007). *Programa de Desarrollo Urbano del Centro de Población de Hermosillo, actualización 2006*. Recuperado el 09 de Mayo de 2013, de <http://www.implanhermosillo.gob.mx/pdu.html>
- 8) Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2012). *Censo de Población y Vivienda 2010*. Recuperado el 07 de Mayo de 2013, de <http://www.inegi.org.mx/>
- 9) Dirección de Catastro Municipal de Hermosillo (2011). *Libro de Valores del Suelo Urbano 2012*. Recuperado el 07 de Mayo de 2013, de <http://www.catastro-hermosillo.gob.mx>
- 10) Bourassa, S. C., Hamelink, F., Hoesli, M., MacGregor, B. D.



## EL MODELO ATÓMICO DE BOHR: UNA APLICACIÓN

RAÚL GARCÍA LLAMAS\*

*Se aplica la teoría atómica de Bohr cuyo centenario se celebra este 2013, utilizando la aproximación electrostática y un algoritmo numérico para resolver las ecuaciones clásicas de movimiento del núcleo y de los electrones en átomos complejos, con el fin de estudiar su dinámica. Se presentan resultados numéricos para el caso del átomo de Hidrógeno y el átomo de Helio.*

DR. RAUL GARCIA LLAMAS  
Universidad de Sonora, Departamento  
de Investigación en Física  
Correo: ragal@cifus.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Raúl García Llamas  
Correo electrónico: ragal@cifus.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 21 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530



## INTRODUCCIÓN

Este año se celebra un siglo de la teoría atómica de Bohr, la cual representa la transición entre la mecánica clásica y la mecánica ondulatoria o cuántica. Finalmente la mecánica cuántica ganó la batalla y en la actualidad es la que se usa para tratar fenómenos a nivel atómico.

En 1913 el físico Niels Bohr (1) planteó los postulados que hoy llevan su nombre y que le permitieron proponer un esquema semiclassical, para explicar los espectros de emisión y absorción del átomo de Hidrógeno y sentar las bases para comprender estos fenómenos en átomos complejos. Esta nueva teoría se basa, por un lado, en el trabajo de Planck (2), en el cual se establecía que el intercambio de energía entre la radiación y la materia se realiza de forma discreta, fenómeno que se conoce como la cuantización de la energía, así como en el de Rutherford (3), que estableció la estructura moderna del átomo con el experimento de difracción de partículas alfa por átomos de oro.

En este trabajo se aplica la teoría atomística de Bohr al problema de la interacción de dos electrones con un núcleo en la aproximación electrostática. Se resuelve numéricamente el problema de los tres cuerpos (4) usando la mecánica clásica y los postulados de Bohr, con el fin de buscar soluciones estables para garantizar la confiabilidad de los resultados encontrados.

Primero se establece un algoritmo numérico, basado en el movimiento con aceleración uniforme para tiempos ultracortos, para encontrar la solución al problema planteado y que satisfagan los postulados de Bohr, posteriormente se aplica dicho formalismo al problema de dos electrones interactuando con un núcleo.

Enseguida se transcriben los postulados de Bohr (1) en su versión original en inglés:

That the dynamical equilibrium of the systems in the stationary states can be discussed by help of the ordinary mechanics, while the passing of the systems between different stationary states cannot be treated on that basis.

Que el equilibrio dinámico de los sistemas en estados estacionarios puede ser discutido con la ayuda de la mecánica ordinaria, mientras que el paso de los sistemas entre diferentes estados estacionarios no puede ser tratado mediante esta base.

That the latter process is followed by the emission of a homogeneous radiation, for which the relation between the frequency and the amount of energy emitted is the one given by Planck's theory.

Que el anterior proceso es seguido por la emisión de una radiación homogénea, para la cual la relación entre la frecuencia y la cantidad de energía emitida es aquella dada por la teoría de Planck.

The different stationary states correspond to the emission of a different number of Planck's energy-quanta and,

Los diferentes estados estacionarios corresponden a la emisión de diferentes números cuánticos de energía de

Planck y,

That the frequency of the radiation emitted during the passing of the system from a state in which no energy is yet radiated out to one of the stationary states, is equal to half the frequency of revolution of the electron in the latter state.

Que la frecuencia de la radiación emitida durante el paso del sistema de un estado en el cual no hay aún energía radiada a uno de los estados estacionarios, es igual a la mitad de la frecuencia de revolución del electrón en el último estado.

## EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO Y EL ALGORITMO NUMÉRICO

Un electrón orbitando alrededor de un protón constituye un átomo de hidrógeno, el elemento más ligero y abundante del universo. Estas partículas están sujetas a fuerzas de tipo electromagnético y gravitacional, esta última se desprecia ya que su magnitud es pequeña comparada con la magnitud de la fuerza electromagnética.

Usando la segunda ley de Newton y considerando únicamente la fuerza de Lorentz, la ecuación del movimiento del protón es:

$$m_p \vec{a}_0(t) = +e\vec{E}_1[\vec{r}_0(t), t] + e\vec{v}_0(t) \times \vec{B}_1[\vec{r}_0(t), t] \quad (1)$$

Donde  $\vec{a}_0(t)$ ,  $\vec{v}_0(t)$ ,  $m_p$  y  $+e$  son la aceleración, la velocidad, la masa y la carga del protón, respectivamente;  $\vec{E}_1(\vec{r}_0, t)$  y  $\vec{B}_1(\vec{r}_0, t)$  representan el campo eléctrico y magnético producido por el electrón en la posición del protón  $\vec{r}_0(t)$ . Mientras que, ecuación del movimiento del electrón está dada por:

$$m_e \vec{a}_1(t) = -e\vec{E}_0[\vec{r}_1(t), t] - e\vec{v}_1(t) \times \vec{B}_0[\vec{r}_1(t), t] \quad (2)$$

Donde  $\vec{a}_1(t)$ ,  $\vec{v}_1(t)$ ,  $m_e$  y  $-e$  son la aceleración, la velocidad, la masa y la carga del electrón, respectivamente;  $\vec{E}_0(\vec{r}_1, t)$  y  $\vec{B}_0(\vec{r}_1, t)$  representan el campo eléctrico y magnético producido por el núcleo en la posición del electrón  $\vec{r}_1(t)$ .

Los campos electromagnéticos producidos por cargas en movimiento son matemáticamente complicados y más adelante se harán algunas simplificaciones para resolver (1) y (2).

Para encontrar una solución numérica a este problema se debe establecer las condiciones iniciales. Las posiciones y velocidades iniciales del núcleo y del electrón son:

$$\vec{r}_0(0) = -fd_1\hat{i}, \quad \vec{r}_1(0) = +d_1\hat{i}, \quad \vec{v}_0(0) = -fv_1\hat{j}, \quad \vec{v}_1(0) = +v_1\hat{j} \quad (3)$$

Donde  $f = m_e/m_p \approx 1/1836$ . Con esta selección de posiciones y velocidades, el centro de masa, que es el punto donde se supone concentrada toda la masa del sistema, y la velocidad del centro de masa son cero.



El momento angular total es  $\vec{L} = \vec{r}_0(0) \times m_p \vec{v}_0(0) + \vec{r}_1(0) \times m_e \vec{v}_1(0)$ , así el postulado de Bohr, se refiere a la versión moderna del postulado 4, la magnitud del momento angular total es un múltiplo entero de la constante de Planck dividida entre dos  $\pi$ , es:

$$(1 + f)d_1 m_e v_1 = n\hbar \quad (4)$$

Donde  $n$  es un número entero positivo y  $\hbar$  es la llamada constante de Planck dividida entre dos  $\pi$ . Esta relación establece la cuantización de la posición. Una vez que se conoce la velocidad, la posición solo puede tomar ciertos valores discretos de acuerdo a la ecuación 4.

### LA APROXIMACIÓN ELECTROSTÁTICA

En esta sección asumimos que el campo eléctrico se puede calcular usando el campo electrostático o Coulombiano y despreciamos el campo magnético. Este aproximación se aplica en átomos ligeros, donde las velocidades esperadas de los electrones son mucho menores que la velocidad de la luz. De las ecuaciones 1 y 2 calculamos la aceleración inicial del electrón y del protón:

$$\vec{a}_1(0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\vec{r}_1(0) - \vec{r}_0(0)}{|\vec{r}_1(0) - \vec{r}_0(0)|^3} = -a_e \hat{i} \quad (5)$$

$$\vec{a}_0(0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p} \frac{\vec{r}_0(0) - \vec{r}_1(0)}{|\vec{r}_0(0) - \vec{r}_1(0)|^3} = +f a_e \hat{i} \quad (6)$$

Donde  $\epsilon_0$  es la constante dieléctrica del vacío y  $a_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e d_1^2 (1 + f)^2$ . Hay que recordar que el campo eléctrico Coulombiano es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las partículas, su forma matemática es:

$$\vec{E}_1(t) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_0(t)}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_0(t)|^3}$$

### EL ALGORITMO NUMÉRICO

Una vez que se tiene la aceleración al tiempo inicial  $t_0 = 0$ , se puede calcular las velocidades y las posiciones del electrón y del núcleo al tiempo  $t_1 = \Delta t$ , suponiendo un movimiento con aceleración uniforme y así sucesivamente. En un movimiento con aceleración uniforme la posición y la velocidad de la partícula están dadas por  $x(t) = x_0 + v_{x0}t + 0.5a_x t^2$  y  $v_x(t) = v_{x0} + a_x t$ , y similarmente para la componente y. Si suponemos que esto se cumple para tiempos muy pequeño, entonces es posible usar estas ecuaciones para conocer las posiciones y las velocidades de las partículas involucradas a un tiempo posterior para así calcular las nuevas aceleraciones dadas por las ecuaciones 5 y 6.

Si la órbita es estable, es decir, si ante una pequeña perturbación energética la órbita es casi la misma,

entonces decimos que la órbita es estable, y si se satisface la ecuación 4 entonces se clasifica como una de las órbitas de Bohr.

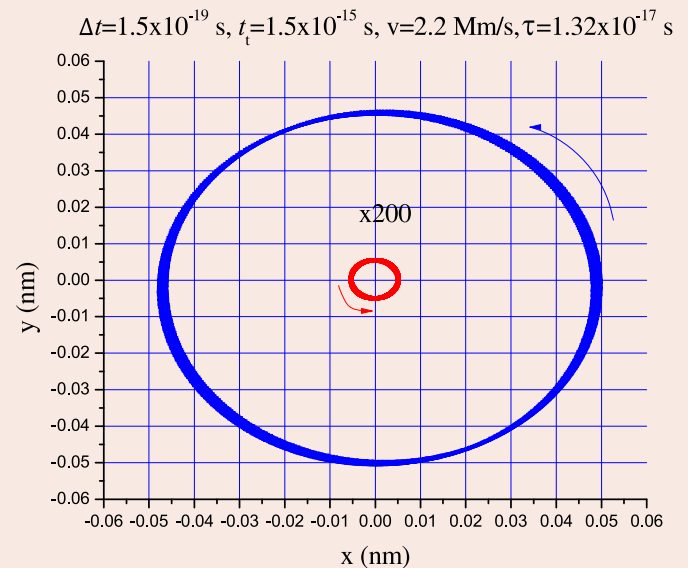


Figura 1. Trayectorias calculadas para el núcleo (color rojo), la cual ha sido aumentada 200 veces, y para el electrón (color azul). Las flechas indican la dirección del movimiento.

De la figura 1 contando los puntos para completar una vuelta y teniendo el intervalo temporal para el cálculo de éstos, se obtuvo el periodo de oscilación  $\tau = 1.32 \times 10^{-17}$  s y por tanto la frecuencia, el recíproco del periodo, es  $\nu = 7.5 \times 10^{16}$  Hz.

Para el caso del átomo de Hidrógeno se puede demostrar que el cuasi-electrón, la pseudo-partícula que aparece al cambiar a las coordenadas del dentro de masa, satisface  $r^2 \dot{\phi} = cte$ , donde  $r$  y  $\dot{\phi}$  son la magnitud de la posición y la velocidad angular del cuasi-electrón, respectivamente. Esto significa que el momento angular se conserva. Este resultado establece una ecuación para la magnitud  $r$ , la cual es resuelta en los libros de mecánica clásica (4). Este caso sirvió para probar el algoritmo numérico. En este problema se establece que las trayectorias pueden ser circulares, elípticas, etcétera. En el caso numérico que tratamos en esta sección, buscamos las condiciones numéricas para obtener trayectorias circulares y que sirviera como punto de partida en el siguiente caso: El átomo de Helio. En la siguiente sección analizaremos el átomo de Helio.

### EL ÁTOMO DE HELIO

Dos electrones orbitando alrededor de un núcleo, que consta de dos protones y dos neutrones, forman un átomo de Helio. Este elemento es el segundo más ligero y el segundo más abundante del Universo. Al igual que en el caso anterior, se plantean las ecuaciones de movimiento para las tres partículas, enseguida se asume



la aproximación electrostática y se desprecia la fuerza magnética. Posteriormente, se considera que a intervalos de tiempos pequeños el movimiento de cada una de las partículas es con aceleración uniforme. Estas ecuaciones permiten obtener la posición y la velocidad de cada una de ellas y de nuevo se regresan a las ecuaciones de movimiento para conocer la aceleración y así sucesivamente. Se buscan trayectorias estables que obedezcan los postulados Bohr.

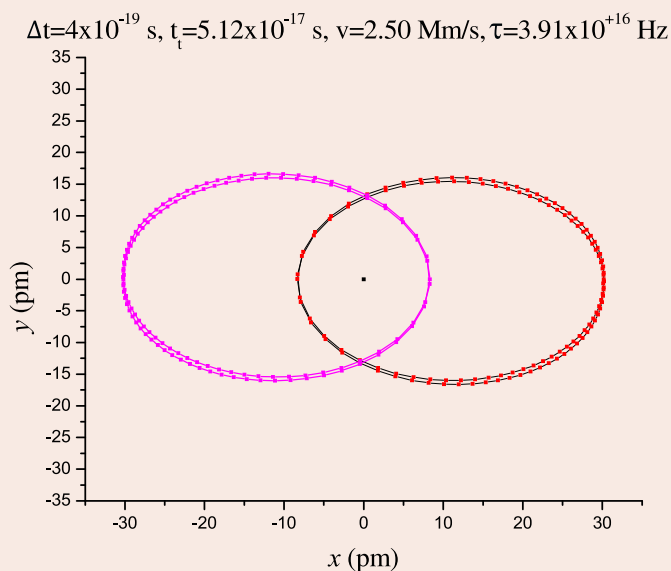


Figura 2. Trayectorias del núcleo (color negro), con las condiciones iniciales seleccionadas el núcleo está estacionario, para los electrones ligados (color magenta) y (color naranja). Tanto la posición inicial de los electrones como sus velocidades se seleccionan del tal manera que satisfagan la condición de Bohr, así como la energía experimental del estado base del átomo de Helio.

Como se puede observar en la figura 2, las trayectorias de los electrones son elípticas y no circulares como en la

figura 1. Esto puede ser así porque no se conoce la forma exacta teórica del estado base del átomo de Helio y esta se aproxima como la suma de dos átomos hidrogenoides.

Cabe mencionar que con el paso del tiempo surgieron otros modelos, de tal manera que a finales de la década de 1920 se tenían cuatro teorías para explicar los espectros de emisión y absorción del átomo de Hidrógeno: La teórica semiclásica de Bohr, la teoría relativista de Sommerfeld, la ecuación de Schrödinger y la ecuación relativista de Dirac.

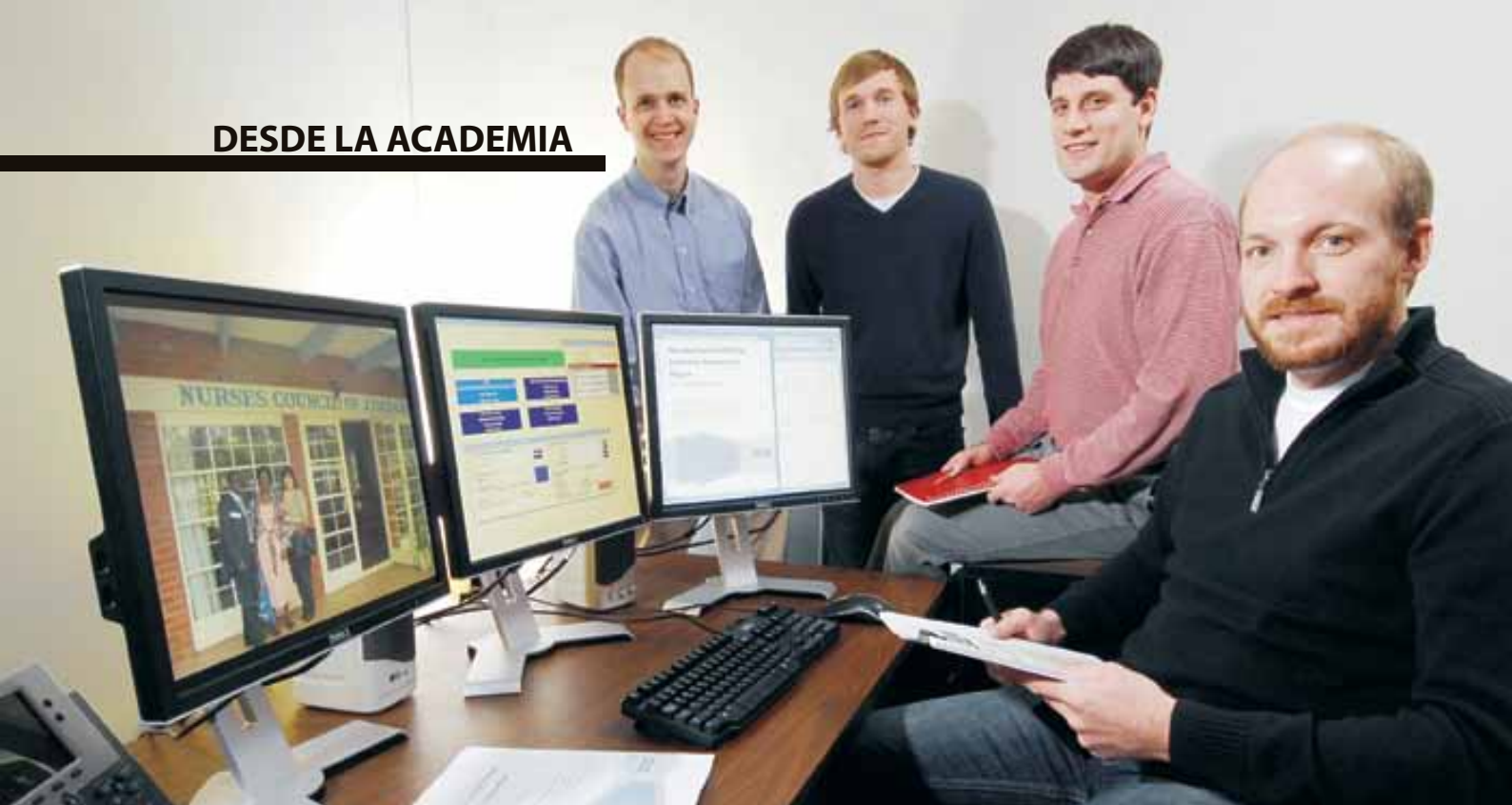
## CONCLUSIONES

El modelo de Bohr fue el primero que de una manera semi-clásica explicó los espectros de emisión y absorción del átomo de Hidrógeno. Se planteó un algoritmo numérico para estudiar la dinámica de átomos complejos, el cual está basado en la teoría de Bohr y en el movimiento uniformemente acelerado para tiempos infinitesimalmente pequeños. Se aplicó el formalismo al átomo de Hidrógeno con el fin de validar los resultados y luego se usó para estudiar el movimiento de los electrones y del núcleo en el átomo de Helio. Las trayectorias encontradas en este último caso son elípticas.

Como un comentario final, es necesario enfatizar que las trayectorias de los electrones y del núcleo son sólo dentro del contexto del modelo semi-clásico de Bohr. La mecánica cuántica, en su forma actual, no habla de trayectorias, sino de regiones donde puede encontrarse a las partículas.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Bohr, N. (1913). *On the constitution of atoms and molecules*. Phil. Mag. 26: 1-25.
- 2) Planck, M. (1901). *On the law of distribution of the energy in the normal spectrum*. Ann. der Phys. 4: 553.
- 3) Rutherford, E. (1911). *The scattering of alpha and beta-particles by matter and the structure of atoms*. Phil. Mag. 21: 669-698.
- 4) Goldstein, H., Poole, C. P. and Safko, J. L. (1999). *Classical mechanics*. 3<sup>rd</sup> Edition.



# ARMONIZACIÓN DE MODELOS DE CALIDAD DEL SOFTWARE

GABRIEL ALBERTO GARCÍA MIRELES\*,  
FÉLIX ÓSCAR GARCÍA RUBIO

*La tendencia actual entre las organizaciones que desarrollan software es la adopción de más de un modelo de calidad para estar en condiciones de competir en diversos sectores del mercado. En esa situación, las organizaciones se enfrentan al problema de coordinar la implantación de múltiples modelos de tal manera que cada modelo logre los beneficios esperados, y al mismo tiempo, que los costos y esfuerzo de implantación sean mínimos. Como respuesta a este problema, surge la armonización de modelos de calidad del software. Actualmente los estudios se centran en la composición de modelos de calidad que abordan prácticas del proceso de desarrollo de software. Sin embargo, las organizaciones también deberían considerar la perspectiva de la calidad del producto. En este artículo, se presenta un avance de la investigación en la armonización de modelos de calidad que toma en cuenta ambas perspectivas, proceso y producto. Se describe la técnica que se propuso para realizar comparaciones de bajo nivel en este contexto. La técnica se aplica en los modelos CMMI-DEV, ISO 12207 e ISO 25010 y, como resultado, se encuentra que los modelos que abordan la perspectiva de proceso contienen prácticas, que corresponden a las etapas de análisis y diseño de software, en donde se debería prestar más atención a la calidad del producto de software.*

M.C. GABRIEL ALBERTO GARCÍA MIRELES  
Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas  
Correo: mireles@gauss.mat.uson.mx

DR. FÉLIX ÓSCAR GARCÍA RUBIO  
Universidad de Castilla-La Mancha, Instituto de Tecnologías y Sistemas de Información  
Correo: felix.garcia@uclm.es

\*Autor para correspondencia: Gabriel Alberto García Mireles  
Correo electrónico: mireles@gauss.mat.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 21 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530







## INTRODUCCIÓN

Las organizaciones que desarrollan software deberían considerar en sus estrategias de crecimiento las necesidades del mercado para ser competitivas. Las necesidades de los clientes y de los usuarios pueden incidir en mejorar la calidad del software, liberar la versión del software en menor tiempo, o que el software se elabore dentro de los límites del presupuesto acordado. Una aproximación a la satisfacción de dichas necesidades se lograría a través de la evaluación del proceso empleado para desarrollar el software, y tras los resultados del diagnóstico, planear una iniciativa de mejora.

Desde los años noventa del siglo XX, han estado surgiendo diversos modelos de calidad en los cuales se recopilan prácticas que los expertos consideran esenciales y que pueden contribuir a incrementar la calidad del software. Dichos modelos se fundamentan en los principios de la gestión de la calidad total (TQM, por sus siglas en inglés) en donde el enfoque hacia la calidad cubre todas las áreas de la organización, desde los niveles directivos hasta los ingenieros individuales y en donde todas las actividades que se realizan en el ciclo de vida del software tienen impacto en la calidad final obtenida. Estos modelos de calidad se basan en la convicción de que el proceso usado para desarrollar el producto de software influye en la calidad del producto y que un buen indicador de la calidad del producto se puede obtener si se conocen las prácticas o actividades que la organización lleva a cabo (1).

Los modelos de calidad pueden presentarse en diferentes modalidades y con distintos requisitos de conformidad. Los modelos de calidad usados en procesos de evaluación o certificación son prescriptivos, es decir, establecen las prácticas o requisitos del proceso que tienen que ser adoptados en una organización o proyecto

concreto. Algunos ejemplos de éstos son los estándares y los modelos de madurez. En el primer caso, los estándares contienen las prácticas recomendadas, enunciadas como requisitos, que deben ser implantadas en el proceso de desarrollo de software. Estos requisitos pudieran servir de base para establecer contratos entre un cliente y un proveedor. Modelos de calidad representativos de este grupo son el ISO 9000 o el ISO 12207.

Los modelos de madurez, por su parte, presentan un mapa de ruta con el cual una organización puede determinar el grado en el cual su proceso de desarrollo es efectivo para lograr las metas del negocio, introducir innovaciones tecnológicas y usar los recursos limitados de la empresa eficientemente. Generalmente tienen de 5 a 6 niveles de capacidad, y a partir de una evaluación, se determina el nivel que le corresponde a la empresa evaluada. Capacidad se refiere al grado en el cual el proceso de desarrollo de software se puede categorizar en distintos niveles, según se gestiona, define, administra cuantitativamente y optimiza. Modelos como CMMI e ISO15504 pertenecen a esta categoría.

No obstante en los últimos años se asiste a una gran proliferación de modelos de calidad, lo que requiere que expertos analicen sus características para entender sus similitudes y diferencias y tener la capacidad de recomendar el más apropiado para una empresa particular. Así, en la revisión realizada en (2), los autores han encontrado más de 315 estándares, guías y otros documentos prescriptivos que son mantenidos por 46 organizaciones diferentes. Otra experta analiza el tipo de dependencia que existe entre los modelos de calidad y para ello usa más de 35 modelos. Todos están enfocados en mejorar la calidad del software pero con distintos matices, según las organizaciones que los crearon y el dominio de aplicación destino. Sin embargo, tal cantidad de modelos complica la

toma de decisiones respecto del modelo de calidad más conveniente, y una mala decisión puede resultar en altos costos y esfuerzo. En el caso de los modelos de madurez, el esfuerzo de implantación puede llevar años para pasar de un nivel de capacidad a otro. Además cada modelo tiene un vocabulario, semántica, estructura y nivel de detalle distintos y con requisitos de evaluación diferentes.

De hecho, la tendencia vigente es que las organizaciones, para acceder a distintos mercados, implanten simultáneamente distintos modelos de calidad (Figura 1). Esto hace que surja el problema de la implantación de múltiples modelos. En este estado, aunque se pretenden lograr los beneficios esperados al implantar cada modelo, la organización debería ser consciente de las limitaciones de recursos, tanto humanos como financieros, para emprender una iniciativa de esta naturaleza y de los conflictos en la coordinación entre múltiples modelos de calidad. Entonces, ¿Qué se puede hacer para lograr los beneficios que señalan los modelos y al mismo tiempo, reducir los costos de implantación y evaluación?, ¿Cómo afrontar los cambios que se dan en los estándares como resultado de su evolución inherente?, ¿Cómo mantener la alineación con los procesos implantados en la organización?, y ¿Cómo se pueden reutilizar los productos generados y la experiencia obtenida de la implantación de un modelo para reducir costos en la implantación de uno nuevo?



Figura 1. Modelos de calidad más comunes que las organizaciones toman en cuenta para implantarlos.

## EL ENFOQUE DE LA ARMONIZACIÓN

El marco de armonización surge como un enfoque para abordar la implantación simultánea de modelos de calidad. En este marco, se reconoce que las empresas abordan distintos estándares de calidad con la intención de satisfacer las metas del negocio. Por tanto, la empresa debe escogerlo de acuerdo a sus metas a largo plazo. Así,

algunos expertos en el área (3) elaboraron un modelo de evaluación estratégica para alinear las metas de la compañía con los objetivos que persigue cada una de los modelos de calidad. Además, el marco considera que la introducción de nuevos modelos de calidad se realice coordinadamente con los modelos implantados con anterioridad. Otros aspectos fundamentales, considerados en el marco de la armonización, están relacionados con la selección de la tecnología y composición de la misma, así como el soporte a la evaluación y despliegue de las tecnologías. Una de las áreas que recientemente se está investigando es la composición de modelos, con especial atención a la comparación de modelos (4).

La comparación de modelos se puede dar en un nivel alto de abstracción y en uno bajo. En el nivel alto se consideran las características de los modelos, su estructura, criterios de evaluación, objetivos y dominio. Con esos elementos se construyen taxonomías (o clasificaciones) de modelos de calidad con las cuales las organizaciones pueden identificar los modelos de calidad más apropiados a sus metas de negocio.

Las comparaciones en un nivel de abstracción bajo o *mapping*, considera de cada modelo: metas, vocabulario, estructura, nivel de detalle de los elementos del modelo y requisitos de evaluación. Con base en esta información se determina el nivel de la estructura del modelo en el cual se debe hacer la comparación. Cuando una organización elige otro modelo de calidad para incorporarlo, es recomendable que conozca el efecto que tendrá sobre los modelos de calidad previamente implantados. Una manera de conocer el impacto es a través del mapping entre modelos al nivel que resulte adecuado para propósitos de certificación/evaluación. Es en esta área en la que se concentra mucho del trabajo de la armonización. Por ejemplo, se tiene el marco de armonización, y diferentes comparaciones entre estándares. Los modelos más evaluados son el CMMI, ISO 9001, ISO15504, ISO12207 (5).

En el estado actual del avance de las investigaciones, la armonización se ha enfocado en la composición de modelos de calidad que abordan prácticas que deben implantarse. Es decir, la perspectiva de procesos en los trabajos de armonización es la dominante. Muchos de los estudios han considerado los modelos ISO9001, CMM, CMMI, ISO15504, SCAMPI y SPICE (5).

Sin embargo, también es de gran importancia abordar la calidad de proceso teniendo en cuenta las características de calidad de producto y por tanto abordando de forma armonizada ambas perspectivas.

## PROPUESTA PARA LA ARMONIZACIÓN ENTRE ENFOQUES DE CALIDAD ORIENTADOS AL PRODUCTO Y AL PROCESO

Como se mencionó en los primeros párrafos, una de los principios que subyacen en los modelos de calidad es la convicción de que la calidad del software depende del proceso empleado para desarrollarlo. Dentro del campo

de la ingeniería del software, se reconoce también la perspectiva de calidad orientada al producto (6). En esta se consideran las características de calidad que debe tener el software, tales como usabilidad, fiabilidad, rendimiento o seguridad. Esas características de calidad se han presentado en los modelos de McCall, ISO 9126, y el ISO 25010, entre otros.



La mayoría de los modelos de calidad orientados al producto de software tienen una estructura jerárquica. Las categorías de calidad contienen subcategorías y éstas pueden estar asociadas tanto a propiedades identificables en los productos de software como a las opiniones y juicios de los usuarios. El modelo de calidad propuesto en ISO 25010 (7) identifica las siguientes características: funcionalidad, seguridad, usabilidad, mantenibilidad, portabilidad, rendimiento, compatibilidad y fiabilidad. En cada una de ellas se incluyen varias subcaracterísticas. Además, el modelo ISO 25010 considera que el software puede ser estudiado en dos etapas diferentes del ciclo de vida: desarrollo y operación. Durante el desarrollo se pueden especificar y evaluar las propiedades estáticas y dinámicas del software y, en la etapa de operación, se evalúa la calidad en uso del software cuando éste interacciona con los usuarios finales y otros sistemas del contexto de operación. Este modelo se puede usar para especificar y validar que los requisitos de calidad relevantes para los distintos usuarios hayan sido considerados en el proyecto.

Aunque la relevancia de esta perspectiva de calidad del producto es notoria, poco trabajo se ha realizado desde la perspectiva de la armonización. De hecho, la mayoría de los trabajos se enfocan en proponer la combinación de modelos orientados al proceso (5). Se sabe que el objetivo principal de los modelos de calidad orientados al proceso incluye prácticas que la organización debe implementar. Por su parte, los modelos de calidad orientados al producto tienen una visión de las características del software relevantes para los usuarios de dicho producto. Además, algunos han considerado que proceso y producto son dos dimensiones distintas.

Algunos investigadores han tratado ese problema empleando *mapping* para identificar los procesos que

enuncian atributos de calidad y con ellos construyen árboles de decisión para recomendar modelos de calidad orientados al proceso. En nuestra investigación, estamos considerando la perspectiva de la armonización entre estándares de calidad de producto y de proceso para encontrar puntos de enlace (8). Dichos puntos de enlace son tareas (o actividades) que aparecen en los modelos de calidad enfocados en el proceso y que enuncian algún atributo o característica de calidad del producto o término relacionado (como requisito no funcional o requisito de calidad). Para realizar esta comparación, se toma como modelo base el modelo de proceso. Sobre éste se buscan los términos asociados al modelo de calidad de producto que nos interesa. La propuesta de *mapping* que se presenta puede identificar el nivel de la estructura en el cual se consideran las características de calidad. Esto último es relevante para establecer los requisitos de conformidad cuando se solicite la evaluación de los modelos de calidad implementados.

El método que se propone incluye una actividad de análisis de los modelos en los cuales se identifican las metas, estructura y requisitos de los modelos de calidad que nos interesan. En la actividad de diseño del *mapping* se elabora el procedimiento de comparación de bajo nivel, según la estructura de los niveles y los requisitos que establece cada modelo. Tras definir el diseño, se efectúa el *mapping* en donde se extrae de cada modelo los enunciados relevantes que se han considerado como puntos de enlace. Finalmente, se evalúan los resultados para realizar el informe correspondiente.

### **APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ARMONIZACIÓN PROPUESTO**

Para mostrar cómo se pueden combinar modelos de calidad orientados al producto y proceso, realizamos dos ejercicios de *mapping* de bajo nivel entre los modelos de calidad. El primero de ellos fue entre el modelo de madurez de capacidades integrado (CMMI-DEV1.3) (9) y el ISO 25010 (7). El segundo incluye a los procesos de técnicos del ciclo de vida del software del ISO12207:2007 (10) contra el ISO25010 (7). Tanto el CMMI-DEV e ISO12207 corresponden a la categoría de modelos de calidad orientados al proceso y sólo consideramos los procesos principales para el desarrollo de software. De los modelos de calidad propuestos en ISO 25010, tomamos el modelo de calidad de producto de software y consideramos todas las características y subcaracterísticas del mismo.

En este análisis buscamos elementos en los modelos que abordaran las características de calidad. Por ejemplo, la tabla 1 muestra un extracto de los enunciados que encontramos en los modelos. En la parte superior se señala un ejemplo del CMMI-DEV; mientras que en la parte inferior se muestra un ejemplo del ISO 12207. En ambos casos, se señala la localización según la estructura del modelo y cómo fue calificada su importancia respecto de lo que el modelo de procesos considera importante. El extracto



de CMMI-DEV se califica como relevancia baja porque el elemento que lo contiene es una nota informativa y estos elementos sólo describen cómo podría implementarse la práctica, mas no son obligatorios. En el caso del extracto del ISO 12207, al ser un requisito, es un elemento de alta relevancia que la organización que decida usar ISO 12207 deberá también incluir en su proceso de desarrollo prácticas para garantizar que las características de calidad sean abordadas adecuadamente en el proyecto.

En la tabla 2 se muestran los diferentes enunciados que encontramos según la estructura del CMMI-DEV. Como se observa, la mayoría de las referencias a atributos de calidad tiene una relevancia baja, pues se encuentran enunciados en subprácticas, elementos informativos y ejemplos. Sólo encontramos una referencia a características de calidad en una práctica específica del área de proceso de desarrollo de requisitos. En el nivel de metas no hay mención explícita a características de calidad del producto. Además, se puede observar que la mayoría de los puntos de enlace identificados en las áreas de proceso denominadas desarrollo de requisitos y solución técnica corresponde a prácticas que deben realizarse durante la identificación de requisitos, análisis de requisitos y el diseño de la arquitectura del software. Pocos puntos de enlace se identifican en las áreas restantes (validación, verificación e integración del producto). En el caso del ejercicio con ISO 12207 también encontramos que los puntos de enlace se concentran en los procesos de definición de requisitos, análisis de requisitos y diseño arquitectónico del sistema.

Tabla 1. Extracto de los puntos de enlace identificados en los modelos de calidad enfocados en los procesos.

Modelo	Elemento	Descripción	Relevancia
CMMI-DEV	Nota informativa de la práctica SP1.3 del área de proceso Integración del producto	Los criterios pueden ser definidos por el comportamiento del rendimiento (funcionalidad y atributos de calidad)	Baja
ISO12207	Requisito 6.4.2.3.1.1	La especificación de requisitos debe describir: ... requisitos de usuario, seguridad, ingeniería de factores humanos, requisitos de interfaz, operaciones, y mantenimiento	Alta

Tabla 2. Punto de enlace en CMMI-DEV.

Área de proceso	Relevancia alta	Relevancia media	Relevancia baja
Validación (VAL)	0	0	1
Verificación (VER)	0	0	1
Integración del producto (PI)	0	0	4
Solución técnica (TS)	0	0	18
Desarrollo de requisitos (RD)	0	1	22





Es importante recordar que los modelos de calidad orientados al proceso incluyen prácticas para que la organización elija los métodos adecuados para el tipo de software que desarrolla. Por otra parte, los estándares generalmente contienen los requisitos mínimos que se esperarían en el desarrollo de software. Bajo este contexto, la identificación de puntos de enlace es una primera aproximación al problema de mejorar la calidad del software combinando ambas perspectivas. Por una parte, se requiere investigar con mayor profundidad qué prácticas son relevantes para incrementar las características de calidad que los usuarios buscan en un producto de software particular. Además, se debe estudiar cómo se pueden alinear estos modelos de calidad con la práctica real del desarrollo de software.

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado brevemente el área de armonización de modelos de calidad. Dado que en la armonización se pretende introducir de manera coordinada nuevos modelos de calidad, las organizaciones que deben satisfacer los requisitos de conformidad de distintos modelos podrían beneficiarse de los métodos y técnicas que existen, y que se están desarrollando. Con base en esta sugerencia, las empresas pueden optimizar el uso de recursos y lograr los beneficios esperados que cada modelo de calidad señala. Además, el proyecto de investigación que se está realizando busca combinar las dos perspectivas de calidad, producto y proceso, a través de enfoques de armonización. Estos resultados iniciales permiten identificar áreas que necesitan soporte metodológico para emprender una iniciativa de mejora integral de la calidad del software.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Fuggetta, A. (2000). *Software process: a roadmap* (Eds.). Proceedings of the Conference on The Future of Software Engineering. pp. 25-34. ACM, Limerick, Ireland.
- 2) Moore, J.W. (1999). *Integrated collection of software engineering standards*. IEEE Software. 16(6), 51-57.
- 3) Kirwan, P., Siviy, J., Marino, L. and Morley, J. (2008). *Improvement Technology Classification and Composition in Multimodel Environments*. Software Engineering Institute, Carnegie Mellon.
- 4) Pardo, C., C.J., Pino, F.J., García, F., Baldassarre, M.T., Piattini, M. (2013). *From chaos to the systematic harmonization of multiple reference models: A harmonization framework applied in two case studies*. Journal of Systems and Software. 86(1), 125-143.
- 5) Pardo, C., C.J., Pino, F.J., García, F., Piattini, M., Baldassarre, M.T. (2010). *A systematic review on the harmonization of reference models*. In Proceedings of the 5th International Conference on Evaluation of Novel Approaches to Software Engineering (ENASE 2010), pp. 40-47. Athens, Greece.
- 6) Allen, J., Kitchenham, B. and Konrad, M. (2006). *Theme Q. The relationships between processes and product qualities*. In E. Forrester (eds.). *A Process Research Framework*. pp. 19-28. Software Engineering Institute, Carnegie Mellon. En <http://www.sei.cmu.edu/publications/books/process/iprc.html>.
- 7) ISO (2010). *ISO/IEC FCD 25010, Systems and software engineering - system and software product quality requirements and evaluation (SQuARE) - System and software quality models*.
- 8) García-Mireles, G., Moraga, M., García, F. and Piattini, M. (2012). *Towards the harmonization of process and product oriented software quality approaches*. In D. Winkler, R. O'Connor, and R. Messnarz (eds.) *Systems, software and services process improvement*. 301, pp. 133-144. Springer Berlin Heidelberg. En [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-31199-4\\_12](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-31199-4_12).
- 9) SEI (2010). *CMMI-DEV, V1.3, Improving processes for developing better products and services*. Technical report, CMU/SEI-2010-TR-033, ESC-TR-2010-033.
- 10) ISO (2008). *ISO/IEC 12207. Systems and software engineering- Software life cycle processes*. En <http://www.12207.com>.



## DIAGNÓSTICO DE LOS INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA LA MEDICIÓN DE LA PRESIÓN ARTERIAL EN LOS PACIENTES ATENDIDOS EN UN CENTRO MÉDICO

MIGUEL ÁNGEL LÓPEZ ARRIQUIVEZ\*, MARTÍN CHÁVEZ MORALES,  
LUIS FELIPE ROMERO DESSENS, RAMÓN ALBERTO LUQUE MORALES

*En los sistemas de salud se dispone de una diversidad de instrumentos, procedimientos, pacientes y competencias técnicas del personal que realiza mediciones. Los elementos pueden tener una influencia significativa en los datos obtenidos pudiendo presentar variabilidad con respecto a las condiciones reales de salud de los pacientes, lo que se puede reflejar en información incorrecta, influyendo en la toma de decisiones equivocadas al momento de diagnosticar y proporcionar terapias a los pacientes. Lo anterior puede deteriorar la salud de los pacientes atendidos y, por consecuencia, su calidad de vida. Este artículo muestra los resultados de una auditoría administrativa de las condiciones metrológicas que deben tener todos los instrumentos de medición de acuerdo a la LFMN, así como de sus características físicas de acuerdo a la normatividad mexicana.*

M.I. MIGUEL ÁNGEL LÓPEZ ARRIQUIVEZ  
Correo: mlopez@industrial.uson.mx  
M.C.I. MARTÍN CHÁVEZ MORALES  
Correo: mchavez@industrial.uson.mx  
DR. LUIS FELIPE ROMERO DESSENS  
Correo: lromero@industrial.uson.mx

M.C. RAMÓN ALBERTO LUQUE MORALES  
Correo: rluque@industrial.uson.mx  
Universidad de Sonora, Departamento de  
Ingeniería Industrial

\*Autor para correspondencia: Miguel Ángel López Arriquivez  
Correo electrónico: mlopez@industrial.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 6 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530



"El saber de mis hijos  
hacia mi grandeza"

EPITEMUS: [www.epistemus.uson.mx](http://www.epistemus.uson.mx)



## INTRODUCCIÓN

Los sistemas de medición son el conjunto de procedimientos, instrumentos, personal y condiciones ambientales necesarias para realizar una medición. Por lo tanto, el control de estos factores son de gran importancia, porque permite tener confiabilidad de los datos obtenidos; se debe garantizar que estos datos de medición representan las condiciones reales de salud de los pacientes. Así pues los profesionales de salud deben utilizar un sistema de medición confiable que les permita en la medida de su competencia tomar decisiones correctas, logrando asegurar que los diagnósticos y tratamientos proporcionados se encuentren en concordancia con la condición de salud de los pacientes atendidos.

En el Plan Nacional de Salud de México (1) se establece que la protección de la salud de los mexicanos requiere de estrategias integrales que fortalezcan y amplíen la lucha contra los riesgos sanitarios y favorezcan la cultura de la salud y el desarrollo de oportunidades para elegir estilos de vida saludables, mediante la prestación de servicios de salud con calidad y seguridad.

Las mediciones de la presión arterial, temperatura corporal y la frecuencia de los latidos del corazón en los pacientes son mediciones realizadas por los profesionales de salud de forma rutinaria y son consideradas como parámetros que determinan la condición de salud de los pacientes. Desde la antigüedad, la presencia del pulso arterial se ha entendido como un signo fundamental de la vida (2).

Adicionalmente, la caracterización de parámetros de la composición de la sangre y orina, al igual que las mediciones eléctricas que sirven para determinar el estado del corazón, del cerebro y de los músculos, son prácticas comúnmente empleadas por los profesionales de salud en el diagnóstico y posterior tratamiento de los pacientes, donde el diseño e implementación de los sistemas de aseguramiento de las mediciones generan confiabilidad de los datos obtenidos. También reflejan la información de salud real de los pacientes, permitiendo a los profesionales de la salud la aplicación de sus conocimientos para la generación de una calidad de vida saludable a los pacientes atendidos en los diferentes sistemas de salud.

En el Foro de Metrología para el Sector Salud (3) se identificó la necesidad de establecer laboratorios de calibración específicos para el área médica a nivel nacional. Esta necesidad se hace más evidente ya que, de acuerdo al Departamento de Comercio de los EUA, la comercialización y uso de instrumentos de medición rehabilitados o de segunda mano en clínicas y hospitales en México se está incrementando. Sin embargo, no se tiene conocimiento de que estos equipos sean evaluados metrologicamente antes de ser utilizados en servicios médicos. Además señalan la necesidad de establecer mecanismos que permitan asegurar la calidad y evaluar los diferentes instrumentos de medición utilizados para brindar servicios de salud, ya que las mediciones realizadas con estos

instrumentos tiene una gran influencia directamente en la calidad del diagnóstico y/o efectividad del tratamiento proporcionados.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para efecto de esta investigación se verificaron las características metrologías de los instrumentos utilizados para la medición de la presión arterial, esfigmomanómetros (Figura 1). La información proporcionada por las mediciones realizadas con estos instrumentos debe reflejar la condición de los parámetros de salud de los pacientes y debe permitir a los profesionales de salud tomar decisiones confiables en los diagnósticos y tratamientos necesarios para cubrir las necesidades de salud de los pacientes atendidos. Los servicios de salud tienen una posición única entre otros servicios debido a la propia naturaleza de los riesgos altamente involucrados (4), los cuales generalmente puede ocasionar la pérdida de la vida o el deterioro de la salud de los pacientes, lo que genera una disminución de su calidad de vida.



Figura 1. Esfigmomanómetro.

Los sistemas de salud deben contar con instrumentos, procedimientos de medición estandarizados y programas de aseguramiento de la calidad de las mediciones de acuerdo con las características de los pacientes. Las fuentes de variabilidad en una medición podrían deberse al mismo procedimiento (instrumentos de medida, factores ambientales), al observador (metodología de medición, déficit sensitivos) y al sujeto observado (5). El presente artículo tiene como objetivo general identificar las condiciones metrologías de los instrumentos utilizados para la medición de la presión arterial, lo cual permita definir las estrategias que nos permitan incrementar la confiabilidad de las mediciones realizadas.

Es importante que todos los instrumentos utilizados en cualquier medición cuenten con la información visible y las características físicas que demuestren que sus resultados de medición son trazables y confiables, como se establece en el artículo 11 de la LFMN (6).



## JUSTIFICACIÓN

Cuando se toman en cuenta los datos obtenidos a partir de una medición no confiable, se pueden presentar dos tipos de errores en el análisis de la información generada, los cuales son:

**DATOS FALSOS POSITIVOS:** Estos datos generan diagnósticos erróneos cuando se determina que el paciente presenta hipertensión y en realidad no la tiene. Esto implicaría proporcionar al paciente medicamentos que no requiere, pudiendo ocasionar otros padecimientos de salud, así como un alto costo al suministrar medicamentos no necesarios.

**DATOS FALSOS NEGATIVOS:** Estos datos generan una información ala especificar al paciente con un diagnóstico de sano cuando en realidad es hipertenso, lo cual implicaría que, al no proporcionarle los tratamientos adecuados, los pacientes pueden presentar una enfermedad degenerativa que afecte su calidad de vida.

El Centro Nacional de Excelencia Tecnológica en Salud, CENETEC (7), estableció que la importancia de la correcta medición de la presión arterial reside en el hecho de que con un error sistemático de medición, como podría ser la subestimación de 5 mm/Hg de la presión arterial real, podría traducirse en que 21 millones de personas no están recibiendo tratamiento antihipertensivo; lo anterior significa que serán candidatos a la presentación de complicaciones por hipertensión arterial. Por el contrario, un error sistemático de medición de 5 mm/Hg por arriba de la presión arterial real, podría clasificar erróneamente a 27 millones de personas como hipertensas cuando no lo son y exponerlos a los riesgos que implica la prescripción de medicamentos antihipertensivos a personas que no lo requieren.

La hipertensión es una de las enfermedades más comunes en todo el mundo que afligen a los seres humanos debido a la morbilidad y mortalidad. La medición de la

presión arterial es el método principal para la detección de la hipertensión en los pacientes y de los padecimientos correlacionados.

En México, de acuerdo a la estadística de mortalidad de 2008 elaborada por el Sistema Nacional de Información de Salud (8) las causa de mortalidad por enfermedades hipertensivas se encuentran en el séptimo lugar de las causales con un 2.9 % (15,698 defunciones). La primera causa de mortalidad es la diabetes mellitus con un 14,0 % (75,572 defunciones), caracterizada por el incremento de padecimientos del corazón, cerebro vasculares y la insuficiencia renal. En el año 2000, la prevalencia de diabetes fue de 7,5% y la de hipertensión fue de 30,7%; así mismo casi la mitad de los adultos con diabetes tenían hipertensión (9). Actualmente el 8 % de los adultos mayores a veinte años la padecen (1). La segunda causa de mortalidad son las enfermedades isquémicas del corazón, con un 11.1 % (79,579 defunciones) que se caracteriza por una disminución de aporte de oxígeno al corazón por consecuencia de obstrucción y/o estrechamiento de las arterias coronarias. La tercera causa es por enfermedades cerebro vasculares con un 5.6 % (30,212 defunciones), de un total de 538,288 defunciones registradas en México durante el 2008.

La diabetes y las enfermedades isquémicas del corazón y las cerebro vasculares son los principales factores de riesgo de muerte en los pacientes. Por lo tanto la medición de la presión arterial confiable nos proporciona una información que permite poder realizar diagnósticos adecuados y a tiempo a los pacientes y evitar los riesgos a la salud provocados por estos padecimientos. La hipertensión arterial también influye en el desarrollo de las enfermedades isquémicas del corazón y las enfermedades cerebro-vasculares (1).

El funcionamiento adecuado de los establecimientos de atención médica está en relación directa con los

conocimientos, habilidades, destrezas, motivación y ética del personal de salud, para que utilice adecuadamente la tecnología que se pone a su disposición como parte de la infraestructura y equipamiento (10).

Dentro de los servicios de salud, la capacidad de los prestadores de servicios de hacer juicios confiables es, de hecho, una habilidad esencial y crítica (11), por lo cual las mediciones de la presión arterial deben identificar las condiciones reales de los pacientes, para que los diagnósticos generados estén en concordancia con el estado de salud de los pacientes.

## METODOLOGÍA

Para lograr los objetivos de la investigación desarrollada se determinaron las condiciones metrológicas de los esfigmomanómetros utilizados para la medición de la presión arterial en las diferentes áreas de un centro médico mediante la siguiente herramienta de auditoría.

### Auditoría de instrumentos de medición

A fin de adquirir la información de interés se realizó una auditoría de los instrumentos de medición de la presión arterial existentes dentro de las instalaciones del centro médico, verificando el cumplimiento con las características metrológicas establecidas en la guía de verificación (Figura 2).

TIPO	<input type="text"/>		
INSTRUMENTO:	<input type="text"/>		
MARCA:	<input type="text"/>	MODELO:	<input type="text"/>
SERIE: _____	CALIBRACIÓN:	SI <input type="checkbox"/>	NO <input type="checkbox"/>
FECHA DE PUESTO EN SERVICIO:	<input type="text"/>	CONDICIÓN:	<input type="text"/>
FECHA CALIBRACIÓN:	<input type="text"/>	EMPRESA:	<input type="text"/>
UBICACIÓN:	<input type="text"/>	# MEDICIONES (Día):	<input type="text"/>
DIMENSIÓN DE MANGUITO (cm):	ANCHO <input type="text"/>	LARGO	<input type="text"/>
LOCALIZACIÓN:	<input type="text"/>	# USUARIOS:	<input type="text"/>
PROGRAMA DE CALIBRACIÓN:	SI <input type="checkbox"/>	NO <input type="checkbox"/>	# INSTRUMENTO: <input type="text"/>

Figura 2. Guía de verificación de auditoría.

## RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos mediante la aplicación de la auditoría de los instrumentos en el centro médico. Durante el desarrollo de la investigación se utilizó la Estadística Descriptiva como herramienta para el análisis de los datos por medio de la generación de gráficas, por ser una de las formas más rápidas y eficiente para la realización de los análisis correspondientes.

El centro médico nos proporcionó el inventario de instrumentos de medición con los que cuentan en cada área especificada. De acuerdo a este inventario, que da un total de cincuenta instrumentos de medición, se realizó una auditoría de veinte instrumentos (40 %) de tipo monitor (Figura 3).

ÁREAS	CANTIDAD DE INSTRUMENTOS
URGENCIAS	6
UCI ADULTOS	2
UTI ADULTOS	4
GINECOLOGÍA	2
PEDIATRÍA	13
MEDICINA	6
CIRUGÍA	8
UCIP	3
UCIN	6

Figura 3. Inventario de instrumentos de medición de la presión arterial por ubicación.

Además de los instrumentos inventariados, se localizaron otros en las áreas mencionadas de tipo aneroides de pedestal y empotrados en la pared no inventariados, dando un cantidad de diecisiete instrumentos de medición; de igual manera se les aplicó la guía de verificación correspondiente.

No se auditaron todos los instrumentos por encontrarse localizados en áreas de acceso controlado o por las condiciones de salud de los pacientes a los cuales se les realizaban las mediciones.

Se presentan los resultados obtenidos a partir de la aplicación de la auditoría en donde se agrupó la información específicamente en dos características metrológicas normalizadas que deben cumplir los instrumentos de medición correspondientes a la trazabilidad de la mediciones (sistema de calibración de los instrumentos) y dimensiones de los manguitos (brazalete). Por consiguiente, la obtención de la información que nos permitiera un análisis de los resultados más precisa y una mejor determinación de las conclusiones y recomendaciones, correspondiente a los datos requeridos por la herramienta, se pueden observar a continuación.





Es importante remarcar que los resultados, de acuerdo a la estadística descriptiva utilizada, nos muestra la tendencia generalizada de que los instrumentos no presentan ningún control administrativo y necesario para demostrar la trazabilidad de las mediciones realizadas y que se puede propagar esta ineficiencia a los otros tipos de instrumentos de medición requerido en los sistemas de salud.

### Resultado 1. Sistema de calibración

Se encontró que los veinte instrumentos tipo monitor y los diecisiete tipo aneroide no contaban con ninguna referencia física (etiqueta de calibración) que demostraran que los instrumentos habían sido calibrados interna o externamente. Por consiguiente, no contaban con la fecha de calibración, nombre del laboratorio de calibración utilizado, así como tampoco un programa de calibración autorizado e implementado.

La totalidad de los instrumentos auditados no contaban con ninguna información visible que demostrara la trazabilidad de las mediciones realizadas, lo cual demuestra que los datos obtenidos no son confiables, desde un punto de vista metrológico.

### Resultado 2. Dimensión de manguito

El manguito es la cámara o bolsa de insuflación por compresión (parte que comprime la arteria externamente lo cual interrumpe el paso de la sangre formada por una cubierta inelástica pero flexible). Por las características de su función es importante que sus dimensiones y las características de los pacientes sean las adecuadas.

Se encontró una gran diversidad de dimensiones de los manguitos en las diferentes áreas auditadas. Las dimensiones van desde 14.5 x 27.0 cm, que son los de dimensiones más grandes, hasta de 2.5 x 7.0 cm, los cuales son los más pequeños, (Figura 4).

Comparando las dimensiones de los manguitos encontrados con las especificaciones establecidas con respecto al tipo de paciente o dimensiones del brazo establecido en la figura 5 para que los resultados obtenidos por las mediciones sean confiables.

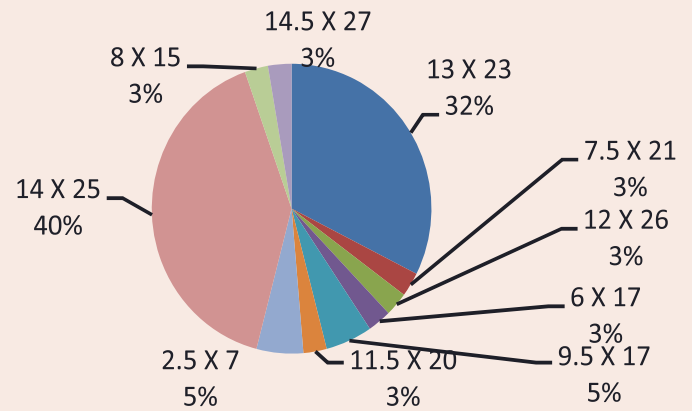


Figura 4. Dimensiones de manguito.

Las diferencias entre el tamaño del manguito y la dimensión del brazo pueden generar errores falso positivos o falso negativos según sea el caso, como se indica en el punto 3.

Tipo de paciente	Circunferencia del brazo (cm)	Manguito	
		Ancho (cm)	Largo (cm)
Neonato	5.0 – 7.5	3	5
Preescolar	7.5 – 13.0	5	8
Escolar	13.0 – 20.0	8	12
Adulto	24.0 – 32.0	13	24
Adulto grande	32.0 – 42.0	17	32
Muslo	42.0 -50.0	20	43

Figura 5. Tamaños de manguito. CENETEC.

No se observaron manguitos con las dimensiones exactas establecidas. Las que más se acercan son las de los manguitos de 13 X 23 cm y 14 x 25 para ser utilizados por pacientes adultos con dimensiones del brazo entre 24 – 32 cm que fueron un total de doce instrumentos (32%) y quince instrumentos (40%) respectivamente, utilizados en las áreas de urgencias, medicina, cirugía y pediatría. Los demás manguitos (28%) se encuentran fuera de las especificaciones establecidas por el CENETEC, por lo cual pueden presentar datos no confiables.

### CONCLUSIONES

La aplicación de la metodología tiene como objetivo demostrar si las decisiones tomadas por el personal de salud en el diagnóstico y en los tratamientos proporcionados a los pacientes son realizadas mediante el uso de instrumentos con características metrológicas confiables. Es importante aclarar que estas conclusiones se

establecen desde un punto de vista metrológico, es decir apegados a las características metrológicas y normalizadas que deben tener todos los instrumentos de acuerdo a la LFMN (6) y la normatividad mexicana.

Los resultados muestran, a partir de la aplicación de la herramienta, que existe suficiente evidencia obtenida a partir de la estadística descriptiva utilizada para el análisis de los datos, que las mediciones no son confiables. Los instrumentos auditados no proporcionan datos metrológicamente válidos, no se encontró evidencia de que los instrumentos se encuentren calibrados, lo cual es una condición para demostrar que los instrumentos no pueden proporcionar datos reales de este parámetro de salud. Es importante considerar que las conclusiones son establecidas desde un punto de vista metrológico y no médico.

No se tiene un programa de calibración, se observaron instrumentos que no tenían número de serie, el cual es proporcionado por el fabricante, ni identificación única lo que dificulta conocer la rastreabilidad del instrumento cuando se considera importante. No se encontró información que indicara cuándo fueron puestos en servicio ni el número de mediciones realizadas por cada instrumento, por lo cual no se podría determinar la deriva del mismo. En general, todos los instrumentos tienen una condición buena en sus características físicas. Asimismo, se encontraron instrumentos fijos en la pared entre dos camas, los cuales no se utilizan por no tener accesorios apropiados para la distancia entre el paciente y el instrumento, además colocados en pedestales y no fijos lo cual pueden sufrir daños por el manejo inapropiado. Se encontraron dimensiones de manguitos de los instrumentos diferentes a las especificaciones establecidas por el CENETEC, que es el organismo responsable, dependiente de la Secretaría de Salud en México, del control de uso de este tipo de instrumentos de medición.

## RECOMENDACIONES

De acuerdo a los resultados y a las conclusiones obtenidos, se recomienda diseñar un sistema de calibración con respecto a los instrumentos de medición, donde se elabore:

Un procedimiento de calibración aplicable para todos los tipos de instrumentos utilizados donde se asegure la trazabilidad de los patrones utilizados. Se tiene que considerar que se cuenta en el centro médico con un instrumento patrón que se puede utilizar para la calibración de los instrumentos, previa calibración correspondiente, validación del procedimiento de calibración interno, acondicionamiento del espacio físico y capacitación de personal específico para el aseguramiento de calibraciones por desarrollar, así como el diseño de un programa de calibración interna donde se encuentren incluidos todos los instrumentos utilizados en las áreas correspondientes.

Un procedimiento de identificación única de cada instrumento, a fin de que permita rastrear su uso y poder

determinar su estatus de confiabilidad en cuanto a los datos generados por las mediciones, así como el número de mediciones realizadas por cada instrumento y que éstos se puedan utilizar como indicativo para determinar la fecha de próxima calibración.

Un procedimiento técnico mediante la comparación de los resultados obtenidos por las mediciones de los instrumentos de medición de diferentes marcas y modelos, lo cual permita identificar los instrumentos más robustos y confiables, es decir, que no presenten errores de medición significativos, y que esto influya en la medida de lo posible en la adquisición de nuevos instrumentos requeridos por las diferentes áreas mediante el establecimiento de criterios técnicos de aceptación y no precisamente por criterios administrativos.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Secretaría de Salud (2007-2012). *Plan Nacional de Salud* (PNS). México.
- 2) Avolio, A. P, Butlin, M. and Walsh, A. (2009). *Arterial blood pressure measurement and pulse wave analysis—their role in enhancing cardiovascular assessment, physiological measurement*, Meas. 31 pp. R1–R47
- 3) CENAM-IMSS (2006). *Foro de Metrología para el Sector Salud* (FMSS). Recuperado el 05 de Mayo de 2013, de <http://www.simet.gob.mx/fss/publico/presentaciones.htm>
- 4) Wan, E., Wan, R., Kamaruzaman, H.J. (2009). *Service quality in health care setting*. International Journal of Health Care Quality Assurance Vol. 22 No. 5, 2009. pp. 471-482.
- 5) Jiménez, J. (1994). *Comparación de métodos cuantitativos de medida*. FMC; 1: 404-410.
- 6) Ley Federal de Metrología y Normalización, LFMN (1992).
- 7) Centro Nacional de Excelencia Tecnológica en Salud, CENETEC (2007). *Manual de calibración y mantenimiento de esfigmomanómetros*. 40 p.
- 8) Vijayaraghavan, M., He, G., Stoddard, P., Schillinger, D. (2010). *Blood pressure control, hypertension, awareness, and treatment in adults with diabetes in the United States-Mexico border region*. Revista Panamericana de Salud Pública. 28(3):164–173.
- 9) NOM-178-SSA1-1998, *Que establece los requisitos mínimos de infraestructura y equipamiento de establecimientos para la atención médica de pacientes ambulatorios*. Diario Oficial de la Federación.
- 10) Greenfield, D., Pawsey, M., Naylor, J. and Braithwaite, J. (2008). *Are healthcare accreditation surveys reliable?* International Journal of Health Care Quality Assurance. Vol. 22, No. 2, pp.105-116.





# DISEÑO DE ALTERNATIVAS DE CONSERVACIÓN DE CARRETERAS EN EL SUR DEL ESTADO DE SONORA

ELSA ELIZABETH MORALES MORALES\*, JOSÉ FRANCISCO GONZÁLEZ OCHOA, ISRAEL MIRANDA PASOS, ANA LILIA LEAL CRUZ

*En este trabajo se analiza el comportamiento de la estructura de pavimento existente, identificando las variables que intervienen en la realización de los estudios de evaluación, con la finalidad de proponer una alternativa de rehabilitación de dicha estructura. La infraestructura carretera existente se construyó a un costo elevado en décadas pasadas; el incremento del flujo vehicular y el no tener una adecuada programación de los trabajos de mantenimiento han dado como resultado que actualmente se cuente con una red de caminos deteriorada, un mayor costo de transporte y un impacto en general negativo para la economía.*

*La identificación de las variables que intervienen en el proceso de evaluación de proyectos, así como los criterios que deben ser aplicados a cada una de ellas, conforman la base conceptual de toda metodología que tiene por objeto determinar una serie de indicadores de tipo económico. Estos indicadores constituyen una herramienta importante para que los responsables de la programación de inversiones de infraestructura carretera tomen decisiones para la optimización de los recursos disponibles. Una conservación adecuada de la carretera permitirá reducir los costos de operación de los vehículos que participan en el traslado de bienes y personas, además de incrementar la velocidad de operación que en términos económicos se traduce en una mayor rotación de capital en cualquiera de sus manifestaciones (dinero, fuerza de trabajo y mercancía).*

M.I. ELSA ELIZABETH MORALES MORALES  
Correo: emorales@dicym.uson.mx  
M.I. JOSÉ FRANCISCO GONZÁLEZ OCHOA  
Correo: gonzal@dicym.uson.mx  
DR. ISRAEL MIRANDA PASOS  
Correo: imiranda@dicym.uson.mx

DRA. ANA LILIA LEAL CRUZ  
Correo: aliz932@gmail.com  
Universidad de Sonora, Departamento  
de Ingeniería Civil y Minas

\*Autor para correspondencia: Elsa Elizabeth Morales Morales  
Correo electrónico: emorales@dicym.uson.mx  
Recibido: 9 de marzo de 2013  
Aceptado: 8 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530



EPITEMUS: [www.epistemus.uson.mx](http://www.epistemus.uson.mx)





## INTRODUCCIÓN

En el tramo de Guaymas - Estación Don, el cuerpo B se estima que se construyó en 1950, su estructura de pavimento consistía en una capa de terracería con una superficie de rodamiento de revestimiento. En 1960 se modificó la estructura de pavimento, aprovechando la capa de revestimiento existente para que funcionara como una capa de base hidráulica y como superficie de rodamiento se tendió una capa de carpeta de mezcla elaborada en el lugar (mezcla en frío). Esta capa se deterioró por su uso y en 1984 se construyó una capa de carpeta de concreto asfáltico elaborada en caliente, que es la existente en la actualidad. El cuerpo A se construyó en el período que va de 1985 a 1988, el cual consistía en una estructura de pavimento formada por una capa subrasante, base hidráulica y carpeta de concreto asfáltico. Esta información se obtuvo con base en la experiencia del personal que ha trabajado en el sector carretero.

En ambos cuerpos se han realizado trabajos de conservación, como son: bacheos, riegos de sello, riegos de protección, carpetas de renivelación, estabilización de base con asfalto, estabilización de base con cemento portland, la cual se lleva a cabo para mitigar el deterioro de la superficie de rodamiento.

Las características geométricas de la carretera en el subtramo del km 80+000 al km 106+000 señalan que es un camino tipo A4S (de dos cuerpos, con dos carriles de circulación por sentido y con faja separadora), con ancho de carril de 3.50 m, acotamiento a ambos lados de 1.50 m, con faja separadora con ancho variable de 3.00 m a 10.00 m, presenta también una pendiente máxima de 2.5%, bombeo del 2%, grado de curvatura máximo de 3.5° y se encuentra ubicado en terreno lomerío. La velocidad de proyecto es de 100 km/h.

Con el análisis del subtramo en estudio se propondrán las alternativas de los trabajos de rehabilitación de la estructura de pavimento a fin de disminuir los problemas ocasionados por las fallas que se presentan en la superficie de rodamiento. De esta manera se tendrán beneficios en ahorros en tiempos de recorrido y se proporcionará seguridad y comodidad a los conductores.

## DESCRIPCIÓN DE LAS CARRETERAS EN MÉXICO

Algunas carreteras que se construyeron hace más de sesenta años, para condiciones de tránsito radicalmente diferentes a las actuales, muestran debilidad estructural y problemas para su correcta conservación. En efecto, los vehículos de antaño transmitían esfuerzos relativamente pequeños, cuyo alcance vertical era también escaso, quizá no superaba los 30 ó 40 cm. En comparación, los vehículos de carga actuales producen esfuerzos mucho mayores, con valores significativos y profundidades más grandes, en el orden de 1 m e incluso más.

A continuación se presentan dos casos. El primero es cuando los materiales empleados en aquellos años para la construcción, especialmente en terracerías, eran de una calidad que hoy debe considerarse como inaceptable para capas que quedan bajo la influencia de las nuevas cargas. En las carreteras del país, las capas de terracerías son arcillosas, de baja resistencia y muy sensibles a cambios volumétricos debido a la variación en sus contenidos de agua, lo que conduce, obviamente, a carreteras de superficie muy deformable. El segundo consiste en que el bajo volumen de los vehículos que entonces se consideraban pesados, producía efectos de fatiga relativamente poco notables. En la actualidad, esos materiales débiles están al alcance del efecto de penetración de los modernos arreglos vehiculares y dejan

ver dramáticamente su baja resistencia; pero además, la repetición de cargas mucho más pesadas induce efectos de fatiga devastadores y causan deformaciones permanentes intolerables.



Estas condiciones imponen a la red básica mexicana condicionantes de conservación muy propia y, por supuesto, diferentes a las prevaecientes en otras redes carreteras en las que ya se ha realizado un esfuerzo de modernización que México aún no ha completado. Así pues, es necesaria una nueva estrategia de construcción de las carreteras para que se incorporen en el futuro a la red mexicana. Anteriormente, la filosofía de diseño de la sección estructural fue lograr una zona superior relativamente resistente, aceptando en forma progresiva materiales francamente débiles en la zona inferior, que se consideraban a salvo de la influencia de las cargas. Actualmente, para la conservación de dichas rúas, se requieren verdaderas acciones de reconstrucción en lo profundo, pues aquellas zonas débiles quedaron dentro de la zona crítica de esfuerzos. El cambio de diseño que se pondera para la época actual tiende a lo contrario: secciones convenientemente robustas en capas profundas. El pavimento no es una estructura que falle de un minuto a otro, capas superficiales débiles significan duraciones cortas, de manera que el criterio expuesto puede manejarse dentro de otro de inversiones diferidas. Fallas en lo profundo no se resuelven más que con costosísimas operaciones de reconstrucción.

La red básica actualmente tiene una longitud de 30,000 km que cubren un área de la geografía nacional en la que seguirán manteniéndose fuertes demandas de transporte. Esta red deberá de ser reforzada estructuralmente, ampliada y mejorada para afrontar demandas más exigentes. En muchos casos las vías actuales deben de ser sustituidas por otras nuevas más acordes con las crecientes demandas.

Las grandes inversiones que exigen las carreteras modernas requieren una creciente participación del capital

privado. El aspecto del financiamiento y de los mecanismos de recuperación correspondientes será cada vez más relevante. El punto álgido a buscar en estos mecanismos de financiamiento es el de lograr paquetes financieros que permitan disponer de recursos para proyectos en los que la recuperación económica será escasa en los primeros años de funcionamiento. Si la planeación nacional ha de adelantarse a la demanda o, por lo menos, ha de conducir a obras de aparición muy cercana a la necesidad, seguramente seguirá ocurriendo que carreteras muy importantes para el país comiencen con niveles de tránsito bajo pero susceptibles a desarrollos adecuados; de esta manera podrán afrontarse las primeras etapas de vida de las obras con cuotas o costos de mantenimiento razonables que no se transformen en un factor decisivo de su puesta en operación. Independientemente del desarrollo de una red productora de riqueza con capacidad estructural adecuada, buena cobertura y buena conservación, habrá de seguirse desarrollando una red alimentadora municipal y rural que, con sus propias funciones, redondee el panorama nacional del transporte carretero (1).

### UBICACIÓN DE LA ZONA EN ESTUDIO

Se localiza en las cartas topográficas Obregón, Guaymas y Huatabampo, escala 1:250,000, limitada por las coordenadas del tramo: Estación Don – Cd. Obregón, en el km 68+900 en la latitud Norte 26°14' y en la longitud Oeste 109°01', ASNM 53 (Figura 1) (2).



Figura 1. Localización del tramo en estudio (SCT, 2010).

### ANÁLISIS DE LA SUPERFICIE DE RODAMIENTO DEL TRAMO EN ESTUDIO

Los estudios básicos para la evaluación de la superficie de rodamiento son: calificación o índice de servicio actual, levantamiento de deterioros, estudio geotécnico y pruebas de laboratorio de suelos, análisis del tránsito y diseño de los espesores de la estructura de pavimento.

## Calificación o Índice de Servicio Actual (ISA)

La calificación que se otorga a un tramo de la vialidad se referirá siempre a toda la sección considerada, por lo que ésta debe reflejar el estado promedio que guarda el tramo dentro de la propia sección. Las condiciones de transitabilidad de la superficie de rodamiento se calificaron en función de la comodidad y/o seguridad que experimenta el usuario al transitar por el camino. Se utilizó una escala del 0 al 5, en el cual el 0 se considera como camino intransitable; del 0 al 1 camino muy malo; del 1 al 2 camino malo; del 2 al 3 camino regular; del 3 al 4 camino bueno; del 4 al 5 camino muy bueno y 5 camino excelente (Tabla 1) (3).

Tabla 1. Índice de Servicio Actual (ISA).

DE KILÓMETRO	A KILÓMETRO	CALIFICACIÓN PROMEDIO
80+000	85+000	3,1
85+000	90+000	2,8
90+000	95+000	2,9
95+000	100+000	2,8
100+000	106+000	2,9

Se realizaron recorridos a lo largo del tramo en estudio para observar la superficie de rodamiento con la finalidad de apreciar y evaluar la extensión y severidad de los daños que presenta la superficie de rodamiento y la estructura de pavimento.

## Levantamiento de deterioros

Los deterioros se clasificaron, para los fines de este trabajo, dentro de los siguientes cuatro grupos: textura, deformación, agrietamiento y mantenimiento realizado. El grado de severidad se midió de acuerdo a la siguiente escala: Muy ligera (con calificación de 1); Ligera (con calificación de 2); Moderada (con calificación de 3); Severa (con calificación de 4) y Muy severa (con calificación de 5). Igualmente se consideró la intensidad del deterioro (porcentaje de área afectada), la cual se califica como: Menor de 10% del área (Esporádica); 10% al 20% del área (Aislada); 20% al 50% del área (Frecuente); 50% al 80% del área (Muy frecuente) y del 80% al 100% del área (Total) (4).

En la superficie de rodamiento en el tramo estudiado se observaron los siguientes deterioros: la textura presenta una severidad de 3, las deformaciones se presentaron esporádicamente con severidad entre 1 y 2, el agrietamiento con severidad de 3 y mantenimiento (bacheo superficial y bacheo profundo) con severidad entre 2 y 3.

Los últimos trabajos de conservación en los tramos en estudio a nivel carpeta asfáltica se realizaron hace dos años; a la fecha no se ha realizado ningún trabajo de reconstrucción o colocado un refuerzo en la estructura de pavimento; se han realizado trabajos de riego de sello; el flujo vehicular se ha ido incrementando, presentándose un

alto porcentaje de vehículos pesados; el índice de servicio se encuentra en la etapa media al nivel de rechazo y esto se ha logrado mantener por arriba de este nivel por los trabajos de conservación rutinaria que se han realizado. La carpeta asfáltica presenta agrietamientos moderados por la oxidación y/o endurecimiento del cemento asfáltico lo cual es causado por su vida en servicio. Esto ocasiona que se vuelva permeable, originando deformaciones, desprendimiento y agrietamientos piel de cocodrilo.

## Medición de la capacidad estructural del pavimento

Para conocer el comportamiento elástico de la estructura del pavimento bajo la acción de las cargas se efectuaron mediciones de rebote, utilizando una viga Benkelman y un camión de volteo con peso en el eje trasero de 8.2 Ton y presión de inflado de 5.8 kg/cm<sup>2</sup>.

Con los datos obtenidos se determinó la deflexión percentil 80 por el método de California y la deflexión característica por el método del Instituto Norteamericano del Asfalto, para medir el espesor de refuerzo que necesita la estructura de pavimento actual (Tabla 2) (5).

Tabla 2. Levantamiento de deflexiones.

SUBTRAMO KM A KM		PERCENTIL 80 MÉTODO DE CALIFORNIA plg x 10-3	MÉTODO DEL INSTITUTO DEL ASFALTO plg x 10-3
80+340	80+820	30,6	34,8
83+940	84+420	44,5	53,3
84+280	84+760	39,3	44,9
87+940	88+420	27,5	31,6
89+760	90+240	38,0	41,7
90+080	90+560	31,6	34,8
93+780	94+260	32,9	36,2
95+080	95+560	42,8	49,8
97+480	97+960	32,5	37,1
99+040	99+520	39,9	46,1
100+000	100+480	43,1	50,2
102+140	102+620	43,3	52,0
105+360	105+840	25,5	32,4

## Estudio geotécnico y pruebas de laboratorio

Con el objeto de conocer el tipo y la calidad de los materiales que actualmente forman la estructura de pavimento, así como los espesores de las diferentes capas que lo forman, se realizaron sondeos del tipo pozo a cielo abierto, se determinó el peso volumétrico del lugar, el contenido de humedad natural; se tomaron muestras representativas para enviarlas al laboratorio para realizar las pruebas de



Tabla 3. Espesores existentes de las capas de pavimento.

UBICACIÓN	ESPESOR		
	DEL SONDEO Km.	CARPETA (cm)	BASE (cm)
80+520	16,50	14,00	30,00
81+040	19,40	20,30	30,00
82+100	13,80	14,30	30,00
82+640	17,40	11,50	30,00
84+200	13,20	16,50	30,00
85+180	16,10	28,30	30,00
86+540	13,00	11,00	30,00
87+520	16,10	17,40	30,00
88+040	15,80	12,40	30,00
89+500	11,20	11,90	30,00
90+580	11,50	15,30	30,00
91+120	14,30	9,40	30,00
92+300	13,80	13,80	30,00
93+260	13,90	13,20	30,00
94+120	13,80	14,80	30,00

UBICACIÓN	ESPESOR		
	DEL SONDEO Km.	CARPETA (cm)	BASE (cm)
95+100	13,80	13,80	30,00
96+400	13,20	13,20	30,00
97+860	16,50	16,50	30,00
98+520	13,20	13,20	30,00
99+380	10,40	10,40	30,00
100+300	14,50	14,50	30,00
101+240	16,50	16,50	30,00
102+620	13,40	13,40	30,00
103+600	11,50	11,50	30,00
104+700	9,90	9,90	30,00
105+260	10,60	10,60	30,00
106+980	16,70	16,70	30,00
107+420	12,90	12,90	30,00
108+960	16,20	16,20	30,00

calidad correspondientes (Tabla 3).

Para localizar las zonas homogéneas, se realizaron las siguientes actividades: obtención del ISA, levantamiento de daños, medidas de deflexión y ejecución de los sondeos de exploración en los que se obtuvo información de la estructura de pavimento.

Con el objeto de conocer el tipo y la calidad de los materiales que actualmente forman la estructura de pavimento, así como los espesores de las diferentes capas que lo forman, se realizaron sondeos del tipo pozo a cielo abierto, se determinó el peso volumétrico del lugar, el contenido de humedad natural; se tomaron muestras representativas para enviarlas al laboratorio para realizar las pruebas de calidad correspondientes.

De los análisis de laboratorio se hacen los siguientes comentarios:

Capa de terracería: el material corresponde a una arena arcillosa (SC), con buenas características mecánicas para su uso, y el grado de compactación varía de 77.2% a 95.4%.

Cuerpo de terraplén: está formado por los materiales de préstamos laterales; el material corresponde a una arena arcillosa (SC), con buenas características mecánicas para su uso, y el grado de compactación varía de 79.9% a 99.0%.

Capa subrasante: corresponde a una capa de 30 cm; se construyó de manera similar a la de terracerías, ya que el material es adecuado también para utilizarse en esta capa, y el grado de compactación varía de 84.3% a 104.9%.

Capa de base hidráulica: corresponde a un material con características adecuadas para formar esta capa, es material procedente de banco de grava arena de arroyo;

tiene una clasificación de una grava arena limosa (GM-SM), los espesores varían de 8.0 cm a 35.0 cm y el grado de compactación varía de 86.3% a 107.2%.

Capa de base asfáltica: el material corresponde a la recuperación de la carpeta asfáltica y la capa de base hidráulica mezclada con emulsión asfáltica; los espesores varían de 9.0 cm a 25.0 cm y el grado de compactación varía de 93.8% a 103.2%.

Carpeta asfáltica: presenta espesores que varían de 3.4 cm a 33.3 cm, se encuentra oxidada, agrietada y está llegando al final de su vida útil.

Estudios del tránsito

Para determinar el análisis del tránsito se utilizaron los datos viales que edita la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, del año 2001 a 2012, y el número de clave de la autopista Estación Don - Nogales, que corresponde al 26445. La estación está ubicada en el km 128+000. El TPDA es de 6,652 vehículos/día, la composición vehicular es de vehículos tipo A = 73.6%, tipo B = 5.1%; tipo C = 21.3%; la tasa de crecimiento es de 0.43% y el coeficiente de distribución del tránsito es de 40% (6).

Para el diseño de las alternativas se consideraron los datos viales, los parámetros de resistencia obtenidos en el laboratorio y se aplicaron los métodos de diseño como el Método del Instituto de Ingeniería de la UNAM, el Método de California, el Método AASHTO, el Método del Instituto Norteamericano del Asfalto y el Método de Fatiga de la UNAM; lo anterior para determinar los espesores de las capas que conformarán la estructura de pavimento. El resumen de los resultados se muestra en la tabla 4.



Tabla 4. Resumen de espesores de carpeta asfáltica.

TRAMO DE ANÁLISIS	PERÍODO DE DISEÑO (AÑOS)	ESPESOR (cm)					ESPESOR RECOMENDABLE (cm)	
		MÉTODO DEL INSTO. ING. DE LA UNAM	MÉTODO AASHTO	MÉTODO DE CALIFORNIA	MÉTODO DEL INSTO. NORT. DEL ASFALTO	MÉTODO DE FATIGA DE LA UNAM	CARPETA	BASE DEL ASFALTO
km 80+000 - 106+000	15	3,7	5,6	23,4	10,4	5,0	9,6	23,4

### DISEÑO DE ALTERNATIVAS DE SOLUCIÓN PARA LA REHABILITACIÓN

Las tres alternativas que se consideran viables para la solución de las estructuras de pavimento analizadas apuntan hacia un mejoramiento de la base hidráulica que puede ser con cemento portland o emulsión asfáltica; la otra alternativa es mejorar la superficie de rodamiento utilizando carpeta de renivelación para el sellado de las grietas y posteriormente colocar una carpeta asfáltica.

#### Primer alternativa de rehabilitación

Cortar la carpeta asfáltica y la base hidráulica existente mediante disgregado con la máquina recuperadora RR-350 a la profundidad de 25.0 cm para formar una base estabilizada con cemento portland al 9.0% PVSM, compactada al 100%, y construir una carpeta de concreto asfáltico con asfalto modificado de 5 cm de espesor, compactada al 95%.

#### Segunda alternativa de rehabilitación

Cortar la carpeta asfáltica y la base hidráulica existente mediante disgregado con la máquina recuperadora RR-350 a la profundidad de 25.0 cm, adicionarle emulsión asfáltica superestable en proporción de 80 L/m<sup>3</sup> para formar una base asfáltica de 25.0 cm de espesor, compactada al 100%, y construir una carpeta con concreto asfáltico con asfalto modificado de 6.0 cm de espesor, compactada al 95%.

#### Tercer alternativa de rehabilitación

Se realizará un bacheo de caja y posteriormente se tenderá una carpeta de renivelación de 8.0 cm con concreto asfáltico compactada al 95%, tender una malla geotextil y construir una carpeta de concreto asfáltico con asfalto modificado de 10.0 cm de espesor, compactada al 95%.

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El problema principal de la red carretera nacional se encuentra en su conservación, rehabilitación y

modernización, ya que gran parte de ella se está operando con índices de servicio actual bajos, cercanos al nivel de rechazo, produciéndose en consecuencia un importante incremento en el costo global del transporte. Esta situación, se origina por falta de recursos suficientes y oportunos, con asignaciones del orden de una cuarta parte de las requeridas. Por lo anterior es grave en la red troncal básica.

Es importante que la conservación, rehabilitación o modernización de la red nacional, se refiera al manejo de los pavimentos, donde se pretenden agrupar los métodos de auscultación, los criterios para la selección y el tratamiento de los materiales, las normas que se utilizan para su caracterización, las soluciones de estructuración, los métodos de diseño de espesores, los procedimientos constructivos y los criterios o posibilidades de inversión. A este respecto ya se tienen avances considerables para la creación de un Sistema Mexicano de Administración de Pavimentos.

### BIBLIOGRAFÍA

- 1) Rico Rodríguez, A., Mendoza Díaz, A. (1995). *Una estrategia para la conservación de la red carretera*, Instituto Mexicano del Transporte, Secretaría de Comunicaciones y Transportes, Publicación Técnica No. 11, San Fandila, Qro.
- 2) INEGI (2013). Cartas topográficas Obregón, Guaymas y Huatabampo, escala 1:250,000. Recuperado el 07 de Mayo de 2013, de <http://www.inegi.org.mx/inegi/default.aspx?s=geo&e=26>.
- 3) Secretaría de Comunicaciones y Transportes-Instituto Mexicano de Transportes (1991). *Catálogo de deterioros en pavimentos flexibles de carreteras mexicanas*. Querétaro, Qro.
- 4) Secretaría de Comunicaciones y Transportes (1997). *Normas para calificar el estado físico de un camino*. Unidad de Autopistas de Cuota. Sría. de Infraestructura. 26 p.
- 5) SEDESOL (2006). *Programa de Asistencia Técnica en Transporte Urbano para las Ciudades Medias Mexicanas*. Manual de Administración de Pavimentos en Vialidades. México, D.F. Tomo XIV.
- 6) Secretaría de Comunicaciones y Transportes (2013). *Datos viales*. Recuperado el 07 de Mayo de 2013, de <http://dgst.sct.gob.mx/index.php?id=600>.



## MÉTODO ALTERNO PARA DETERMINAR EL COSTO DE PRODUCCIÓN EN LÍNEAS DE ENSAMBLE

JAIME DÍAZ SANTANA\*

*En este artículo se presenta una metodología para determinar el costo de la producción en líneas de ensamble mediante el sistema de costeo por procesos. Este método es aplicable en empresas que trabajan bajo pedidos específicos de productos cuyas corridas de producción, por pedido, abarcan varios meses. Lo anterior es posible mediante la transformación virtual del sistema de producción real (por pedidos u órdenes de trabajo) a un sistema de producción por procesos.*

M.C. JAIME DÍAZ SANTANA  
Universidad de Sonora, Departamento  
de Ingeniería Industrial  
jdiaz@industrial.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Jaime Díaz Santana  
Correo electrónico: jdiaz@industrial.uson.mx  
Recibido: 10 de marzo de 2013  
Aceptado: 9 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530





## INTRODUCCIÓN

El costeo de la producción en líneas de ensamble se apega más al método de costeo por órdenes de trabajo; sin embargo, también puede efectuarse como una variación del costeo por procesos. Las industrias más representativas para aplicar esta variación de costeo utilizan mano de obra directa en forma intensiva en la fabricación de sus productos, como es el caso de las maquiladoras de manufactura. En estas empresas la producción se realiza en líneas de producción llamadas líneas de ensamble (1). Las líneas de ensamble se dividen en estaciones de trabajo; en cada estación labora un obrero; cada obrero efectúa una o varias operaciones y, de acuerdo a la demanda a satisfacer, se balancea la línea (labor que corresponde a la ingeniería industrial), es decir, se determinan cuántas estaciones de trabajo iguales (en cuanto al contenido de trabajo) se requieren y cuáles operaciones se deben efectuar en cada una de ellas (2). Para el caso que nos ocupa, cada conjunto de estaciones con igual contenido de trabajo formarían el equivalente de un proceso.

Mediante el método de costeo de la producción por procesos, los costos correspondientes se calculan cada mes en cada proceso (3). La producción terminada de cada uno de ellos se transfiere al siguiente proceso, el cual la recibe con su correspondiente costo y le agrega más valor. La producción terminada en el último proceso refleja el costo total de los productos que estarán disponibles para su venta o se envían directamente a los clientes de acuerdo a sus pedidos.

Cada mes, en cada proceso, es necesario calcular los grados de avance de los diferentes elementos del costo de producción (materia prima directa, mano de obra directa y gastos indirectos de fabricación) de las unidades que no se terminaron de fabricar completamente, es decir, del inventario final de producción en proceso. Lo anterior es para determinar el número de unidades equivalentes y los costos de producción.

En cada proceso, el costo unitario de producción se calcula como un promedio del costo total de producción del proceso entre las unidades de producto totalmente terminadas y éstas se calculan mediante la suma de las unidades que ya tienen integrada la materia prima, la mano de obra y los gastos indirectos de fabricación que le corresponden ser agregadas en un proceso, todo al 100%, y la producción que quedó sin terminar, la cual debe convertirse a su equivalente de producción terminada, es decir, debe determinarse a cuántas unidades 100% terminadas equivale esta producción que quedó inconclusa.

En cuanto a la producción inconclusa, consideremos el siguiente ejemplo: si al final de un mes quedaron 4 unidades de producto sin terminar a las cuales sólo se les agregó, en promedio, el 50% de la materia prima del total requerido, éstas equivalen a 2 unidades 100% terminadas, es decir, a dos unidades equivalentes de producto terminado en cuanto a materia prima se refiere.

## CASO ESPECÍFICO

Se utilizará un ejemplo muy simplificado puesto que el objetivo de este artículo es el de ilustrar cómo puede determinarse el costo de producción en líneas de ensamble mediante el sistema de costeo por procesos con base en costos promedio.

Supondremos que para fabricar una camisa primeramente se efectúa el corte de la tela y luego la formación de las mangas. El formado de cada manga requiere de tres operaciones: formado del puño (OP1), cosido de la parte superior de la manga (OP2), y cosido de la parte superior de la manga con el puño (OP3); no se incluirán las materias primas hilo y botones. Es lógico que siguen otras operaciones para completar el producto: la camisa; sin embargo, nos referiremos solamente a la formación de la manga, sea la izquierda o derecha, para ilustrar el caso que nos ocupa. Finalmente diremos que para satisfacer la demanda de camisas requerida por los clientes, el balanceo de la línea de producción requiere de dos estaciones de trabajo para corte de las piezas de la camisa y de cinco estaciones de trabajo para la formación de mangas. Las dos estaciones de corte formarían el proceso de corte y las cinco estaciones de formado de mangas formarían el proceso de formado de mangas; y en éste, en cada estación de trabajo hay un obrero y cada uno de ellos realiza las mismas tres operaciones de formado de la manga (Figura 1).

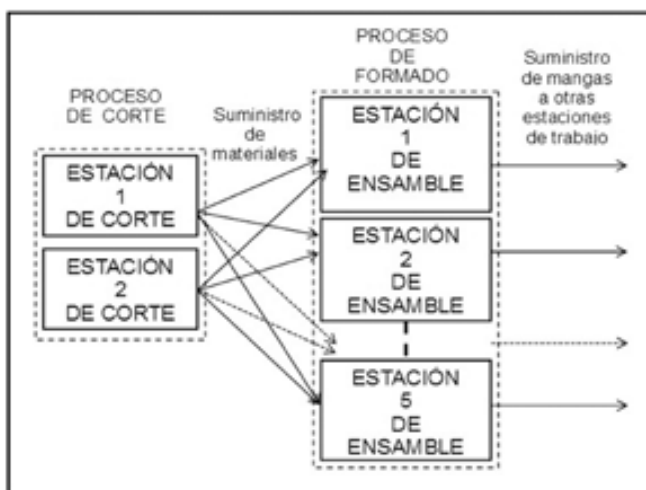


Figura 1. Distribución esquemática de las estaciones de trabajo para formar la manga de la camisa.

Es lógico suponer que del proceso de corte se envían las otras piezas de las camisas a otros procesos para su ensamble, de acuerdo a como se haya determinado en el balanceo de la línea de producción. Sin embargo, se reitera que nos referiremos solamente al proceso de formado de mangas, donde sólo se agrega costo por concepto de la mano de obra directa empleada y por los gastos indirectos de fabricación incurridos.



En cada estación de trabajo del proceso del formado de mangas se efectúan las tres operaciones, anteriormente explicadas, sobre las materias primas MP1 Y MP2 (telas para formar el puño y la manga de la camisa, respectivamente), las cuales provienen del proceso de corte, y las realiza un solo obrero. En la tabla 1 se presentan los tiempos de operación y los porcentajes de cada tiempo de operación con relación al tiempo total de mano de obra para formar la manga.

Tabla 1. Tiempo de las operaciones para formar la manga.

Operación	Tiempo (min)	Tiempo (%)
OP1	0.3	25
OP2	0.6	50
OP3	0.3	25
Total	1.2	100

Supondremos que en un mes determinado se ha generado la siguiente información en el proceso de formado de mangas. Una unidad de producto en este proceso corresponde a una manga formada.

El Inventario Inicial de Producción en Proceso (IIPP) al inicio del mes fue de 55 unidades inconclusas con los siguientes costos de las materias primas, que incluyen los costos de mano de obra directa y gastos indirectos de fabricación; y que fueron transferidas por el proceso de corte al proceso de formado de mangas: MP1 = \$440, MP2 = \$785. El valor agregado por este último proceso a las anteriores materias primas del inventario inicial fue de \$680 por concepto de mano de obra directa y \$130 de gastos indirectos de fabricación.

Durante el mes se agregaron, procedentes del departamento de corte, materiales para producir 13,000 unidades de producto (mangas), con un costo de \$104,000 para MP1 y \$195,000 para MP2. La mano de obra utilizada en el mes y los gastos indirectos de fabricación fueron \$160,000 y \$30,000, respectivamente.

El inventario de producción en proceso al final del mes (IFPP) fue de una unidad incompleta en cada estación de trabajo, con los materiales y mano de obra utilizados, y grados de avance de esta última para formar una manga, tal y como se muestra en las tablas 2 y 3.

Tabla 2. Materiales utilizados en el inventario final de producción en proceso.

Estación de trabajo del proceso	Materiales utilizados	
	MP1	MP2
1	Si	Si
2	Si	No
3	Si	No
4	Si	Si
5	Si	Si
Total	5	3

Tabla 3. Operaciones realizadas sobre el inventario final de producción en proceso y grados de avance de la mano de obra en cada estación de trabajo.

Estación de trabajo del proceso	Operaciones realizadas			Tiempo de operaciones (min)			Avance de mano de obra por unidad	
	OP1	OP2	OP3	OP1	OP2	OP3	Min	%
1	Si	Si	No	03	06	00	0.9	75
2	Si	No	No	03	00	00	0.3	25
3	Si	No	No	03	00	00	0.3	25
4	Si	Si	No	03	06	00	0.9	75
5	Si	Si	No	03	06	00	0.9	75
								275%

En el inventario final también quedaron sin utilizar, es decir, sin trabajo alguno, 63 piezas de MP1 y 65 de MP2 (Tabla 4), las cuales, sumadas a los materiales que tienen algún grado de proceso: cinco de MP1 y tres de MP2 (Tabla 2), dan un total de 68 piezas de cada uno. Dicho en otras palabras, quedaron en el inventario final, con o sin trabajo agregado, materiales para el formado de 68 mangas.

Con la información proporcionada se procede a aplicar el procedimiento para costear la producción del proceso de formado de mangas, mediante el procedimiento de costo promedio (4).

Tabla 4. Número de piezas de MP1 y MP2 que quedaron sin trabajo alguno.

Material	Estación de trabajo					Total
	1	2	3	4	5	
MP1	10	15	12	18	8	63
MP2	10	16	13	18	8	65



### PASO 1: Flujo de unidades físicas

En este paso se determina el número de unidades que en el período se transfieren al siguiente proceso o que se terminan y estarán disponibles para su venta. Para el flujo de las unidades físicas que intervinieron en el proceso en el mes de cálculo no se consideran los grados de avance de las unidades. El procedimiento se presenta en la tabla 5, en unidades de producto en todos los renglones.

Tabla 5. Determinación de la producción transferida al siguiente proceso en unidades de producto.

Inventario inicial de producción en proceso	55
+ Agregadas en el período	13,000
Disponibles en producción	13,055
- Inventario final de producción en proceso	68
Producción transferida al siguiente proceso	12,987

### PASO 2: Unidades equivalentes

Todos los materiales que quedaron, tanto en el IIPP como en el IFPP, se consideran con el 100% de avance en cuanto a sus costos de MPD, MOD y GIF que se agregaron en el proceso de corte.

En el proceso de formado de mangas no se agregan nuevas materias primas. A las materias MP1 y MP2 recibidas del proceso de corte se les incrementa el valor agregado con el costo de la mano de obra directa y los gastos indirectos de fabricación que se generaron en el mes.

Quedaron en proceso, con o sin trabajo agregado, 68 unidades de producto. En cuanto a la mano de obra directa, la suma de grados de avance que se muestra en la tabla 3, de las unidades que tuvieron algún trabajo es del 275%. Las 68 unidades inconclusas, en lo relativo a mano de obra directa (MOD), tienen un avance promedio de 275%/ 68 ud = 4.044118% y las unidades equivalentes en MOD son igual a 68 ud (0.04044118) = 2.75 unidades.

Para este ejemplo diremos que la aplicación de los gastos indirectos de fabricación al costo de los productos se realiza con base en la mano de obra empleada en su fabricación. Cuando lo anterior ocurre, el por ciento de avance de la producción inconclusa y las unidades equivalentes, en cuanto a la mano de obra se refiere, son idénticos en lo relativo a los GIF.

La producción que este proceso transfiere al siguiente se encuentra al 100% de avance en cuanto a la materia

prima y trabajo que tenía que agregarse en el proceso de corte y en el de formado de mangas. Los resultados de este paso se presentan en la tabla 6.

Tabla 6. Unidades equivalentes de la producción transferida y del inventario final de producción en proceso.

	MATERIA PRIMA		MANO DE OBRA DIRECTA	GASTOS INDIRECTOS DE FABRICACIÓN
	MP1	MP2		
Producción transferida 100% de avance	12,987	12,987	12,987	12,987
Más IFPP (68 unidades)				
<b>MP1</b> 68 unidades con 100% de avance	68			
<b>MP</b> 68 unidades con 100% de avance		68		
<b>Mano de obra directa</b> 68 unidades con 4.04411 118% de avance			2.75	
<b>Gastos indirectos de fabricación</b> 68 unidades con 4.04411 118% de avance				2.75
<b>Total unidades equivalentes</b>	<b>13,055</b>	<b>13,055</b>	<b>12,989.75</b>	<b>12,989.75</b>

En el costeo de la producción con base en los costos promedio se considera que en cada proceso el costo del inventario inicial de producción en proceso, más el costo que se agrega en un período, se convierte en el costo del inventario final de producción en proceso más el costo de la producción que se termina o que se transfiere al siguiente proceso. Estos dos últimos elementos se calculan con base en los costos promedio de cada uno de los elementos del costo de producción: materia prima directa, mano de obra directa y gastos indirectos de fabricación. Los costos promedio se obtienen mediante una división de los dos primeros costos (del inventario final + el agregado) entre las unidades equivalentes correspondientes que se trabajaron en el período. Los cálculos correspondientes se presentan en las tablas 7, 8 y 9.

### PASO 3. Costos unitarios (Tabla 7)

Tabla 7. Determinación de los costos unitarios.

	IIPP (\$)	Agregado (\$)	Total (\$)	Unidades equivalentes	Costo unitario (\$)
MP1	440.00	104,000.00	104,440.00	13,055.00	8.00
MP2	785.00	195,000.00	195,785.00	13,055.00	15.00
MOD	680.00	160,000.00	160,680.00	12,989.75	12.37
GIF	130.00	30,000.00	30,130.00	12,989.75	2.32
<b>Total</b>	<b>2,035.00</b>	<b>489,000.00</b>	<b>491,035.00</b>		<b>37.69</b>





#### PASO 4. Costo del inventario final de producción en proceso (Tabla 8)

Tabla 8. Determinación del costo del inventario final de producción en proceso.

	Unidades equivalentes	Costo unitario (\$)	Total (\$)
MP1	68.00	8.00	544.00
MP2	68.00	15.00	1,019.79
MOD	2.75	12.37	34.02
GIF	2.75	2.32	6.38
<b>Total</b>			<b>1,604.19</b>

#### PASO 5. Costo de la producción transferida al siguiente proceso (Tabla 9)

Tabla 9. Determinación del costo de la producción transferida.

	Unidades equivalentes	Costo unitario (\$)	Total (\$)
MP1	12,987.00	8.00	103,896.00
MP2	12,987.00	15.00	194,765.21
MOD	12,987.00	12.37	160,645.98
GIF	12,987.00	2.32	30,123.62
<b>Total</b>			<b>489,430.81</b>

El anterior resultado puede obtenerse también como se muestra en la tabla 10

Tabla 10. Cálculo alternativo para determinar el costo de la producción transferida.

<b>Costo del IIPP</b>	<b>\$ 2,035.00</b>
+ Costo agregado	\$ 489,000.00
<b>Costo disponible</b>	<b>\$ 491,035.00</b>
- Costo del IFPP	\$ 1,604.19
<b>Costo producción transferida</b>	<b>\$ 489,430.81</b>

Si bien el ejemplo resuelto se refiere a un solo proceso, la metodología es la misma para los otros procesos que resultarán y, una vez resuelto el último, se tendría el costo unitario promedio de cada camisa producida en el periodo.

#### BIBLIOGRAFÍA

- 1) Niebel, B., Freivalds, A. (2007). *Ingeniería industrial; Métodos, estándares y diseño del trabajo*. (11. Edición). México: Alfaomega.
- 2) García Criollo, R. (2005). *Estudio del Trabajo: Ingeniería de métodos y mediciones del trabajo*. (2. Edición). México. Mc Graw Hill.
- 3) Torres Salinas, A. (2004). *Contabilidad de Costos: Análisis para la toma de decisiones*. (2. Edición). México: Mc Graw Hill.
- 4) Cuevas Villegas, C. F. (2001). *Contabilidad de Costos: Enfoque gerencial y de gestión*. (2. Edición). Colombia: Prentice Hall.



## ELEMENTOS PARA LA PRESENTACIÓN DE LAS FORMAS DIFERENCIALES

RAFAEL RAMOS FIGUEROA\* Y CARLOS ROBLES CORBALÁ

*En este artículo damos una exposición general de los conceptos de forma diferencial, producto cuña entre formas, operador diferencial entre formas y concluimos con el enunciado del Lema de Poincaré. Pero no solo eso, también motivamos las definiciones de estos conceptos mostrando que cada uno de ellos surge de manera natural como consecuencia de intentar dar respuesta a una pregunta inicial muy simple.*

DR. RAFAEL RAMOS FIGUEROA  
 Correo: rramos@gauss.mat.uson.mx  
 M.C. CARLOS ROBLES CORBALÁ  
 Correo: crobles@gauss.mat.uson.mx  
 Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas

\*Autor para correspondencia: Rafael Ramos Figueroa  
 Correo electrónico: rramos@gauss.mat.uson.mx  
 Recibido: 15 de febrero de 2013  
 Aceptado: 13 de mayo de 2013  
 ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Por ser de naturaleza local, todas las definiciones que daremos en este artículo son válidas en cualquier subconjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ ; sin embargo, generalmente escribiremos  $\mathbb{R}^n$  en vez de  $A$  por simplicidad de notación.

Empezaremos por motivar el concepto de diferencial de una función.

Recordemos que por definición una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}$  si existe un número  $f'(a)$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a). \quad (1)$$

Si definimos la función lineal  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\lambda(h) = f'(a) \cdot h$  entonces la igualdad (1) equivale a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0. \quad (2)$$

La interpretación de la igualdad (2) es que la función  $\lambda + f(a)$  es la mejor aproximación lineal de  $f$  en el punto  $a$ . La expresión (2) nos da la idea para generalizar la definición de diferenciabilidad para una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

Una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es **diferenciable** en  $p \in \mathbb{R}^n$  si existe una función lineal  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(p+h) - f(p) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Notemos que como  $h$  es un punto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f(p+h) - f(p) - \lambda(h)$  es un punto en  $\mathbb{R}^m$ , es indispensable considerar las normas. Se demuestra en [7] (Teorema 2-1, pág. 14) que de existir la función lineal  $\lambda$ , es única. Denotaremos a  $\lambda$  por  $Df(p)$  y llamaremos a la función lineal  $Df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  **la diferencial de la función  $f$  en el punto  $p$** .

También se demuestra en [4] (Teorema 16, pag. 125) que

$$(Df)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se llama **matriz Jacobiana**. Ver [7], pag. 15.

Para obtener el valor de  $(Df)(p)$  en un vector  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  usando la matriz Jacobiana, simplemente consideramos el vector  $v$  como vector columna y lo multiplicamos por la izquierda por dicha matriz.

Diremos que una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es **diferenciable** en  $\mathbb{R}^n$  si  $f$  es diferenciable en cada punto  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ .

El caso que nos interesa en este artículo es cuando  $m=1$ . En este caso tenemos que la diferencial  $Df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

$$Df(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right). \quad (3)$$

Esto es,  $Df(p) = \nabla_p f$  donde por definición  $\nabla_p = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right)$ . Para cada  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  tenemos que  $Df(p)(v)$  es un escalar que representa la rapidez de cambio de la función  $f$  en el punto  $p$  en la dirección del vector  $v$ .

Ahora procederemos a motivar los conceptos de 1-forma y producto cuña entre 1-formas.

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  tenemos que cualquier vector  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  se expresa como  $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$  con  $v^j$  escalares en  $\mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} Df(p)(v) &= Df(p) \left( \sum_{j=1}^n v^j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j Df(p)(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por la linealidad de  $Df(p)$  y la última igualdad es por (3).

Obtenemos así la igualdad

$$Df(p)(v) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p). \quad (4)$$

Dado que también las proyecciones canónicas

$$x^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas por  $x^i(p^1, \dots, p^n) = p^i$  son funciones diferenciables tenemos que

$$\begin{aligned} Dx^i(p)(v) &= \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j \delta_{i,j} = v^i \end{aligned}$$





**Jules Henri Poincaré**

donde la primera igualdad es por (4) y donde  $\delta_{i,j}$  es la función delta de Kronecker definida por

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Obtenemos de esta manera la igualdad

$$Dx^i(p)(v) = v^i. \quad (5)$$

Por las igualdades (4) y (5) tenemos que

$$Df(p)(v) = \sum_{j=1}^n Dx^j(p)(v) \frac{\partial f}{\partial x^j}(p).$$

Reordenando los términos en la igualdad anterior y denotando a  $Dx^j$  por  $dx^j$  obtenemos la conocida expresión de cálculo

$$Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j. \quad (6)$$

Observemos que el conjunto ordenado  $\{dx^1(p), \dots, dx^n(p)\}$  es la base dual para el espacio vectorial dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  asociada a la base ordenada canónica  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  pues por construcción se cumple que  $dx^i(p)(e_j) = \delta_{i,j}$  para cada  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ . (Consultar [2] pág. 98, para la definición de base dual).

Motivados por la expresión (6) asociada a la función diferenciable  $f$ , una pregunta natural que surge es la siguiente:

Dada cualquier "1-forma"  $w$ , es decir una expresión de la forma

$$w = g_1 dx^1 + \dots + g_n dx^n$$

donde las  $g_i$  son funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$  diferenciables, ¿existe una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con segundas derivadas parciales continuas tal que  $Df = g_1 dx^1 + \dots + g_n dx^n$ ? Esta es precisamente la pregunta inicial a la que se hace referencia en el resumen de este artículo.

De existir dicha  $f$  debe cumplir que

$$Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^n g_j dx^j$$

dado que los  $dx^j$  son base la igualdad anterior se da si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = g_j \quad \text{para cada } j = 1, \dots, n \quad (7)$$

Por otra parte, la condición de que  $f$  tiene segundas derivadas parciales continuas implica que las segundas derivadas parciales mixtas de  $f$  deben coincidir (Ver [4] Teorema 15, pág. 119 o [7] Teorema 2-5, pág.24), esto es, para cada  $1 \leq i, j \leq n$  se cumple

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right). \quad (8)$$

Entonces por (7) y (8) tenemos que  $\frac{\partial g_i}{\partial x^j} = \frac{\partial g_j}{\partial x^i}$ , es decir, es necesario que se cumpla la condición

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^i} = 0 \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n \quad (9)$$

para que exista la  $f$  requerida.

Reescribiremos la condición (9) introduciendo nueva simbología. Si **definimos** el "producto"  $\wedge$  en el conjunto  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  mediante la regla  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$  podemos expresar la condición (9) como la única ecuación

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = 0. \quad (10)$$

Así si  $w = \sum_{i=1}^n g_i dx^i$  es una 1-forma, **definiendo** el operador  $d$  por

$$dw = \sum_{i=1}^n Dg_i \wedge dx^i \quad (11)$$

obtenemos que la condición (10) se traduce en lo siguiente

$$dw = \sum_{i=1}^n Dg_j \wedge dx^j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x^i} dx_i \right) \wedge dx^j = 0$$

donde la última igualdad de la expresión anterior es por (10).

Así, con este nuevo lenguaje, obtenemos que una condición necesaria para que la 1-forma  $w = \sum_{i=1}^n g_j dx^j$  tenga una "primitiva"  $f$  (esto es,  $Df = w$ ) es que  $dw = 0$ .

Veremos mas adelante que la condición  $dw = 0$  no es una condición suficiente y refinaremos los conceptos de producto cuña  $\wedge$  y operador  $d$ , pero antes hagamos un pequeño resumen de lo que se hizo en esta sección:

Vimos que el concepto de operador diferencial  $D$  para funciones  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$  nos conduce de manera natural a definir el concepto de 1-forma. Una vez definido este concepto surgió la pregunta natural de que si damos cualquier 1-forma  $w$ , ¿la 1-forma tiene siempre una primitiva  $f$ ? Para tratar de contestar esta pregunta fue conveniente introducir un "producto cuña  $\wedge$ " en el conjunto de 1-formas  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  tal que  $dx^i \wedge dx_j = -dx^j \wedge dx_i$ . Lo que a su vez nos condujo a introducir el concepto de "derivada de 1-formas" o operador diferencial de 1-formas. Así si  $w = \sum g_i dx^i$  es una 1-forma, definimos  $dw = \sum Dg_i \wedge dx^i$ , es decir,  $dw = \sum \sum \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx^j \right) \wedge dx^i$  y resultó, con este nuevo lenguaje, que una condición necesaria para que una 1-forma dada tenga una primitiva es que  $dw = 0$ .

## CAMPOS VECTORIALES

Antes de definir formalmente el concepto de 1-forma presentaremos en esta sección el concepto de campo vectorial y algunas de sus propiedades. Las definiciones de campo vectorial y de 1-forma son totalmente análogas y comparten algunas propiedades en común desde el punto de vista algebraico. La razón por la que presentamos primero el concepto de campo vectorial es porque su definición es un poco mas simple que la definición de 1-forma y su interpretación geométrica es mas evidente.

**Definición 1.** Sea  $p \in \mathbb{R}^n$ . Definimos el conjunto

$$\mathbb{R}_p^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

Llamaremos al conjunto  $\mathbb{R}_p^n$  espacio tangente a  $\mathbb{R}^n$  en  $p$ .

Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_p^n$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con operaciones definidas por

$$(p, v_1) + (p, v_2) = (p, v_1 + v_2)$$

$$a(p, v) = (p, av)$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Denotaremos a  $(p, v)$  por  $v_p$  de aquí en adelante.

**Definición 2.** Un campo vectorial es una función

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}_p^n$$

tal que  $F(p) \in \mathbb{R}_p^n$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ .

La condición  $F(p) \in \mathbb{R}_p^n$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  de la definición 2 es equivalente a decir que se cumple que  $\pi \circ F(p) = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  donde

$$\pi : \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es la proyección canónica definida por  $\pi(v_p) = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ .

Dado que por definición un campo vectorial  $F$  es tal que  $F(p) \in \mathbb{R}_p^n$ , entonces tenemos que  $F(p) = F^1(p)(e_1)_p + \dots + F^n(p)(e_n)_p$  donde  $F^1(p), \dots, F^n(p)$  son escalares en  $\mathbb{R}$  que dependen del punto  $p$ . Es decir, tenemos que las  $F^i$  son funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Este hecho nos permite formular la siguiente definición:

**Definición 3.** Decimos que un campo vectorial  $F$  es continuo o diferenciable si cada una de las funciones  $F^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lo son en el sentido usual.

La definición 2 y el hecho de que para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $\mathbb{R}_p^n$  tiene estructura de espacio vectorial nos permite inducir (punto por punto) operaciones entre campos vectoriales:

**Definición 4.** Sean  $F$  y  $G$  campos vectoriales. Definimos las operaciones

$$(F + G)(p) = F(p) + G(p)$$

$$\langle F, G \rangle(p) = \langle F(p), G(p) \rangle$$

$$(fF)(p) = f(p)F(p)$$

donde  $p$  está en  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y  $\langle, \rangle$  denota el producto punto en  $\mathbb{R}^n$ .

Observemos que  $F + G$  y  $fF$  son de nuevo campos vectoriales y que  $\langle F, G \rangle$  es una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Mas aún, si  $F$  y  $G$  son campos vectoriales diferenciables (continuos) y  $f$  es una función diferenciable (continua) entonces no es difícil demostrar que los campos vectoriales  $F+G$  y  $fF$  son diferenciables (continuos) y que la función  $\langle F, G \rangle$  es diferenciable (continua).

## ÁLGEBRA EXTERIOR

En esta sección esencialmente lo que haremos es definir formalmente los conceptos de k-forma y operador cuña  $\wedge$  entre k-formas, pero en un sentido estrictamente algebraico. Dejaremos la definición geométrica formal de k-forma para la siguiente sección.

**Definición 5.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Sea  $k \geq 1$  un entero. Definimos  $\Lambda^k(V^*)$  como el conjunto

$$\Lambda^k(V^*) = \left\{ \alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es multilineal y alternante} \right\}$$

donde alternante significa que  $\alpha(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}) = \text{Signo}(\sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k)$  para toda permutación  $\sigma$  en el grupo simétrico  $S_k$ ,  $v_i \in V$ . (Ver [1] para el concepto de grupo de permutaciones).

Para  $k=0$  definimos  $\Lambda^k(V^*)$  simplemente como el conjunto de números reales  $\mathbb{R}$ .

Es importante señalar que para cualquier  $k \geq 0$  se tiene que  $\Lambda^k(V^*)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . (Consultar [7], pag 72).

**Definición 6.** Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  elementos en  $V^*$  donde  $V^*$  es el espacio dual de  $V$ . Definimos el producto exterior

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ por}$$

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k (v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}$$

donde  $v_i \in V$ ,  $(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}$  es la matriz cuadrada de tamaño  $k \times k$  con entradas  $\varphi_i(v_j)$  y  $\det$  significa determinante.

El hecho de que el determinante es una función multilineal y alternante implica que  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  es un elemento de  $\Lambda^k(V^*)$ . ([7], pag.75). Esto nos permite "generalizar" y al mismo tiempo formalizar el producto  $\wedge$  que discutimos en la primera sección: tomando  $V = \mathbb{R}_p^n$  en la definición anterior tenemos que  $\Lambda^1(V^*) = (\mathbb{R}_p^n)^*$  y así los elementos  $dx^1(p), \dots, dx^n(p)$  pertenecen a  $\Lambda^1(V^*)$ . Aplicando la definición 6 y haciendo un simple cálculo obtenemos que

$$dx^i(e_r)(p) \wedge dx^j(p)(e_s) = -dx^j(p)(e_r) \wedge dx^i(p)(e_s)$$

donde  $e_r$  y  $e_s$  son elementos cualquiera de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , lo cual significa que

$$dx^i(p) \wedge dx^j(p) = -dx^j(p) \wedge dx^i(p)$$

justo como necesitábamos. Esto es, el elemento  $dx^i(p) \wedge dx^j(p)$  ya no es sólo un "símbolo", sino que es un elemento bien definido del espacio vectorial  $\Lambda^2(V^*)$  con  $V = \mathbb{R}_p^n$ . Retomaremos estos hechos en la siguiente sección.

A continuación analizaremos a  $\Lambda^k(V^*)$ . Dado que  $\Lambda^k(V^*)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  es natural preguntarse cuál es su dimensión y exhibir una base. Este espacio es

de hecho de dimensión finita y una base se construye a partir de los productos cuña de los elementos de la base dual asociada a cualquier base de  $V$ , mas precisamente (Consultar [7], Teorema 4-5, pág. 75 para ver la demostración de la siguiente construcción),

Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  es la base dual asociada a la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  para  $V^*$ . Entonces

$$\{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

es una base de  $\Lambda^k(V^*)$ . Así  $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$  y además

$$\Lambda^k(V^*) = \left\{ \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \mid a_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R} \right\}$$

donde la expresión  $i_1 < \dots < i_k$  que aparece debajo de la sumatoria anterior significa que los sumandos de dicha sumatoria están indexados por los elementos de la base  $\{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  de  $\Lambda^k(V^*)$ .

La manera natural de extender el producto exterior  $\wedge$  es la siguiente

**Definición 7.** Se define  $\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V^*)$  por

$$\begin{aligned} & \alpha \wedge \beta (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn} \sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

para  $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ ,  $\beta \in \Lambda^l(V^*)$ ,  $v_1, \dots, v_{k+l}$  en  $V$ .

## FORMAS

En la sección 1 vimos que la condición  $dw=0$  es necesaria para que una 1-forma  $w$  tenga una "primitiva"  $f$  y mencionamos que dicha condición no es suficiente. En realidad si lo es cuando el dominio de definición de la 1-forma es todo  $\mathbb{R}^n$ . Más precisamente, veremos al final de esta sección que el hecho de que una  $k$ -forma  $w$  tal que  $dw=0$  tenga una primitiva depende de una condición topológica del dominio abierto de definición de la  $k$ -forma  $w$ . Dicha condición es que el dominio abierto en cuestión sea contraíble (ver [6], pág. 374, para la definición de espacio contraíble). Este resultado se conoce como Lema de Poincaré.





En analogía con la definición de campo vectorial dada en la definición 2 tenemos la siguiente:

**Definición 8.** Sea  $k \geq 0$  un entero. Una  $k$ -forma es una función

$$w : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$$

tal que  $w(p) \in \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ .

En el caso de 1-formas tenemos que  $\Lambda^1((\mathbb{R}_p^n)^*) = (\mathbb{R}_p^n)^*$ . Nótese la clara analogía de la definición 2 de campo vectorial con la definición 8 para el caso de 1-formas, esto es, tenemos que la definición 8 es la misma que la definición 2 de campo vectorial salvo que hemos cambiado  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  por  $\mathbb{R}_p^n$ .

Nuevamente como en el caso de campos vectoriales tenemos que la condición dada en la definición 8 de que  $w(p) \in \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  equivale a decir que se cumple que  $\pi \circ w(p) = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  donde

$$\pi : \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es la proyección canónica definida por  $\pi(\alpha) = p$  si  $\alpha \in \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$ .

Otra observación es que si  $w$  es una  $k$ -forma con dominio  $\mathbb{R}^n$  entonces por la definición 8 tenemos que  $w(p)$  es un elemento en  $\Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$ . Por otra parte, si  $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$  es una base de  $\mathbb{R}_p^n$  y  $\{\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)\}$  es la base dual de  $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$  para  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  entonces de la construcción de una base para  $\Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$  que dimos en la sección 2 tenemos que  $w(p)$  se expresa como

$$w(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k}(p) \varphi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(p)$$

donde los  $w_{i_1 \dots i_k}(p)$  son escalares en  $\mathbb{R}$  que dependen del punto  $p$ . Es decir, tenemos que las  $w_{i_1 \dots i_k}$  son funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Al igual que en el caso de campos vectoriales este hecho nos permite dar la siguiente definición

**Definición 9.** Una  $k$ -forma se llama continua o diferenciable si cada una de las funciones  $w_{i_1 \dots i_k}$  lo son en el sentido usual.

Nuevamente como en el caso de campos vectoriales las formas se suman y se multiplican punto a punto, mas precisamente tenemos

**Definición 10.** Sean  $w$  y  $\eta$  dos  $k$ -formas y sea  $\epsilon$  una  $l$ -forma. Definimos

$$\begin{aligned} (w + \eta)(p) &= w(p) + \eta(p) \\ (fw)(p) &= f(p)w(p) \\ (w \wedge \epsilon)(p) &= w(p) \wedge \epsilon(p) \end{aligned}$$

donde  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable.

En analogía con el caso de campos vectoriales tenemos que  $w + \eta$  y  $fw$  son  $k$ -formas y que  $w \wedge \epsilon$  es una  $(k+l)$ -forma. Más aún, si  $w, \eta$  y  $\epsilon$  son formas diferenciables (continuas) y  $f$  es diferenciable (continua) entonces no es difícil demostrar que las formas  $w + \eta, fw$  y  $w \wedge \epsilon$  son diferenciables (continuas). Notemos también que una 0-forma es simplemente una función  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Así, tenemos que  $f \wedge w = fw$ .

Haciendo una ligera modificación de la expresión (3) de la sección 1 para  $Df(p)$  tenemos la siguiente:



**Definición 11.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Definimos la 1-forma

$$df : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (\mathbb{R}_p^n)^*$$

de la siguiente manera, a cada  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  le asociamos la función lineal  $df(p) : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $df(p)(v_p) = Df(p)(v)$  para cada  $v_p$  en  $\mathbb{R}_p^n$ .

Notemos que la definición 11 es en realidad la definición formal del operador  $d$  para 0-formas discutido en la sección 1 que manda a cada 0-forma  $f$  en la 1-forma  $df$ .

El siguiente lema nos permitirá dar una expresión explícita para la 1-forma  $df$  de la definición 11 y también dar la expresión de cualquier  $k$ -forma  $w$  en términos de los  $dx^i$ .

**Lema 12.** Sean  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  las proyecciones canónicas para cada  $i$  y consideremos las 1-formas asociadas  $dx^1, \dots, dx^n$ . Entonces el conjunto

$$\{dx^1(p), \dots, dx^n(p)\}$$

es la base dual para  $\Lambda^1(\mathbb{R}_p^n) = (\mathbb{R}_p^n)^*$  asociada a la base canónica  $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$  de  $\mathbb{R}_p^n$ .

Demostración:

$$\begin{aligned} (dx^i(p))((e_j)_p) &= Df^i(p)(e_j) \\ &= \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial x^i}{\partial x^n}(p) \right) (e_j) \\ &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por (3) de la sección 1.

**Corolario 13.** por el lema 12 cada  $k$ -forma  $w$  con dominio en  $\mathbb{R}^n$  se puede escribir como

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

donde  $w_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ .

En particular si  $w$  es una 1-forma con dominio  $\mathbb{R}^n$  entonces  $w$  es de la Forma

$$w = g_1 dx^1 + \dots + g_n dx^n$$

donde las  $g_i$  son funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , lo cual coincide con la definición informal de 1-forma que dimos en la sección 1.

Procedamos ahora a obtener la expresión de la 1-forma  $df$  asociada a una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la definición 11. Para esto necesitamos primero el siguiente lema:

**Lema 14.**

$$(dx^i(p))(v_p) = v^i \text{ donde } v_p = v^1(e_1)_p + \dots + v^n(e_n)_p$$

Demostración:

$$\begin{aligned} dx^i(p)(v_p) &= dx^i(p)\left(\sum_{j=1}^n v^j (e_j)_p\right) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j dx^i(p)((e_j)_p) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j \delta_{i,j} \\ &= v^i \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad es por el lema 12.

**Teorema 15.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (df(p))(v_p) &= (Df)(p)(v) \\ &= (Df)(p)(\sum_{i=1}^n v^i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i Df(p)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n dx^i(p)(v_p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por el lema 14.

Así tenemos que la expresión para  $df$  dada por el teorema 15 coincide con la expresión "informal" que obtuvimos para  $df$  en la sección 1.

Procederemos ahora a definir el pull-back asociado a una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable y a una  $k$ -forma  $w$  con dominio  $\mathbb{R}^m$ . Pero antes necesitamos introducir dos definiciones.

Haciendo una ligera modificación de la definición de la diferencial  $Df(p)$  dada en la página 2 en la sección 1 tenemos la siguiente:

**Definición 16.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable. Para cada  $p$  fijo en  $\mathbb{R}^n$   $f$  induce la función lineal  $f_* : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$  definida por  $f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}$  para cada  $v_p \in \mathbb{R}_p^n$ :

**Definición 17.** Para cada  $p$  fijo en  $\mathbb{R}^n$  la función  $f_* : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$  de la definición 16 induce una función lineal

$$f^* : \Lambda^k((\mathbb{R}_{f(p)}^m)^*) \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$$

definida de la siguiente manera, si  $\varphi \in \Lambda^k((\mathbb{R}_{f(p)}^m)^*)$ , esto es

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}_{f(p)}^m \times \dots \times \mathbb{R}_{f(p)}^m}_{k \text{ - veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función multilineal y alternante, entonces por definición

$$f^*(\varphi) : \underbrace{\mathbb{R}_p^n \times \dots \times \mathbb{R}_p^n}_{k \text{ - veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

es el elemento en  $\Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$  tal que

$$f^*(\varphi)((v_1)_p, \dots, (v_k)_p) = \varphi(f_*((v_1)_p), \dots, f_*((v_k)_p))$$

para cada  $(v_1)_p, \dots, (v_k)_p \in \mathbb{R}_p^n$ .

Usando las dos definiciones anteriores estamos listos para presentar la definición de pull-back para una  $k$ -forma:

**Definición 18.** Dada una  $k$ -forma

$$w : \mathbb{R}^m \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^m} \Lambda^k((\mathbb{R}_p^m)^*)$$

y una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definimos la  $k$ -forma

$$f^*(w) : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$$

por  $(f^*(w))(p) = f^*(w(f(p))) \in \Lambda^k((\mathbb{R}_p^n)^*)$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ . A la  $k$ -forma  $f^*w$  se le llama el "pull-back" de  $w$  bajo la función  $f$ .

Es importante notar lo siguiente: si  $n < m$  entonces  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$  de manera natural. Si tomamos  $f$  como la función inclusión  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en la definición 18 y consideramos una  $k$ -forma diferenciable  $w$  en  $\mathbb{R}^m$  entonces  $i^*(w)$  es una  $k$ -forma diferenciable en  $\mathbb{R}^n$  que puede pensarse como la restricción de  $w$  al dominio  $\mathbb{R}^n$ , aun cuando  $\mathbb{R}^n$  no es un abierto en  $\mathbb{R}^m$ . Esta es una propiedad fundamental de las formas que en general no comparten los campos vectoriales: cualquier forma en  $\mathbb{R}^m$  se puede restringir a un subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^m$  siempre y cuando tenga sentido decir que la función inclusión de  $S$  en  $\mathbb{R}^m$  es una función diferenciable. En general esto ocurre cuando  $S$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^m$  (consultar [5], pag. 3 y pag. 9 para la definición de variedad diferenciable y subvariedad diferenciable).

En el siguiente teorema enunciamos las propiedades algebraicas del pull back, para su demostración consultar [7] (Teorema 4-8, pag. 83).

**Teorema 19.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable. Así  $f = (f^1, \dots, f^m)$  con  $f^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces para cualesquiera  $w, w_1, w_2$   $k$ -formas con dominio  $\mathbb{R}^m$  y cualquier función  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable se cumplen las siguientes propiedades:

$$(1) f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j.$$

$$(2) f^*(w_1 + w_2) = f^*(w_1) + f^*(w_2).$$

$$(3) f^*(gw) = (g \circ f) f^*(w).$$

$$(4) f^*(w_1 \wedge w_2) = f^*(w_1) \wedge f^*(w_2).$$



Daremos a continuación la definición formal de operador diferencial  $d$  para cualquier  $k$ -forma.

**Definición 20.** Sea  $w$  una  $k$ -forma (diferenciable) con dominio  $\mathbb{R}^n$ . Entonces por el corolario 13  $w$  se puede escribir como

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

donde  $w_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables. Definimos una  $(k+1)$ -forma  $dw$  con dominio en  $\mathbb{R}^n$  por

$$dw = \sum_{i_1 < \dots < i_k} dw_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

donde

$$dw_{i_1 \dots i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j$$

por el teorema 15.

En el siguiente teorema enunciamos las propiedades principales del operador diferencial  $d$ , su demostración se encuentra en [7] (Teorema 4-10, pág.84).

**Teorema 21.** Para cualesquier par de  $k$ -formas  $w, w_1$ , cualquier escalar  $c$  en  $\mathbb{R}$ , cualquier función diferenciable  $f$  de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  y cualquier  $l$ -forma  $\eta$  se cumple:

- (1)  $d(w + cw_1) = dw + cdw_1$  (Linealidad).
- (2)  $d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^{kl} w \wedge d\eta$ .
- (3)  $d(dw) = 0$  (es decir,  $d^2(w) = 0$ ).
- (4)  $f^*(dw) = d(f^*(w))$  ( $d$  conmuta con el pull-back).

**Definición 22.** Una  $k$ -forma  $w$  es cerrada si  $dw = 0$ .

Una  $k$ -forma  $w$  es exacta si existe una  $(k-1)$ -forma  $\eta$  tal que  $w = d\eta$ .

**Observación 23.** el inciso (3) del teorema 21 dice que toda forma exacta es cerrada.

**Observación 24.** No toda forma cerrada es exacta, por ejemplo en  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  podemos definir la 1-forma

$$w = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

entonces se puede demostrar que no existe una 0-forma  $f$  definida en  $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$  tal que  $df = w$ . Para la demostración de este hecho consultar [7], pág. 85.

Sin embargo el Lema de Poincaré nos da condiciones suficientes para que una  $k$ -forma cerrada definida en un dominio abierto de  $\mathbb{R}^n$  tenga una primitiva:

**Teorema 25.** (Lema de Poincaré) Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto contraíble entonces toda  $k$ -forma cerrada es exacta.

**Demostración:** Ver cita bibliográfica (7), pág. 86, o bien (3), pág. 23. Para una prueba más general consultar (8), pág. 155 o también (5), pág. 109.

Notemos que no es necesario pedir que el dominio de definición de una  $k$ -forma cerrada  $w$  sea contraíble para que  $w$  tenga una primitiva: dado que  $\mathbb{R}^n$  es contraíble tenemos, por el lema de Poincaré, que cualquier  $k$ -forma cerrada  $w$  con dominio  $\mathbb{R}^n$  tiene una primitiva, es decir, existe una  $(k-1)$ -forma  $\eta$  tal que  $d\eta = w$ . Si  $p$  es cualquier punto en  $\mathbb{R}^n$ , podemos considerar la restricción de  $w$  al dominio abierto  $U$  definido por  $U = \mathbb{R}^n - \{p\}$  el cual no es contraíble. La restricción de  $w$ ,  $w|_U$  es nuevamente una  $k$ -forma cerrada con dominio  $U$  y es tal que tiene una primitiva dada por  $\eta|_U$ .

Dicho de otro modo, si  $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  denota la inclusión de  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  entonces aplicando el inciso (4) del teorema 21 tenemos que la  $k$ -forma restricción  $i^*(w)$  con dominio  $U$  es tal que

$$d(i^*w) = i^*(dw) = i^*(0) = 0$$

es decir, la  $k$ -forma  $i^*(w)$  es cerrada. Además

$$d(i^*\eta) = i^*(d\eta) = i^*(w)$$

es decir la primitiva de  $i^*(w)$  es la  $(k-1)$ -forma  $i^*(\eta)$ .

Con este análisis concluimos los objetivos de este artículo.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Fraleigh, J. B. (1987), *Algebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- 2) Hofman, K. y Kunze, R. (1973), *Algebra Lineal*, Prentice Hall.
- 3) Madsen, I. and Tornehave, J. (1999), *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press, Reprinted.
- 4) Marsden, J.E. y Tromba, A.J. (1981), *Calculo Vectorial*, Fondo educativo Interamericano.
- 5) Michor, P.W. (2007), *Topics in Differential Geometry*, Lecture notes.
- 6) Munkres, J.R. (2008), *Topología*, Pearson, 2a. Edición. Reimpresión.
- 7) Spivak, M. (2004). *Cálculo en variedades*, Editorial Reverté, S. A., Reimpresión.
- 8) Warner, F.W. (1987). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, Second Printing.



# LA GEOMETALURGIA: UNA EXCELENTE HERRAMIENTA MULTIDISCIPLINARIA PARA LA VINCULACIÓN UNIVERSIDAD-INDUSTRIA

EFRÉN PÉREZ SEGURA\*, JOSÉ CARLOS GASPAR, FRANCISCO BROWN

*La geometalurgia es una herramienta que involucra a especialistas en el campo de la geología, la microscopía, la minería y la metalurgia extractiva para optimizar los procesos de explotación y beneficio de los minerales. Dicha herramienta ha tomado auge en el mundo en los últimos años, gracias a la comprensión de que las menas son combinaciones de minerales, no de elementos químicos y, puesto que todos los procesos tratan con minerales, son las características fisicoquímicas de éstos las que determinan las condiciones de un proceso de recuperación industrial. Considerando que la industria minera en México ha jugado un importante papel en el desarrollo nacional, que no existen en nuestro país laboratorios de investigación o de servicios que trabajen la geometalurgia y que la Universidad de Sonora cuenta con los especialistas necesarios para abordar este campo con éxito, se propone la conformación de un equipo humano que se vincule a la industria con este tipo de servicios.*

DR. EFRÉN PÉREZ SEGURA  
Universidad de Sonora, Departamento  
de Geología  
Correo: efrempese@yahoo.com

DR. JOSÉ CARLOS GASPAR  
SERGEO – Serviços Geológicos et  
Representações-Ltda.  
Correo: gaspar@empresasergeo.com.br

DR. FRANCISCO BROWN  
Universidad de Sonora, Departamento  
de Polímeros y Materiales  
Correo: fbrown@guaymas.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Efrén Pérez Segura  
Correo electrónico: efrempese@yahoo.com  
Recibido: 5 de marzo de 2013  
Aceptado: 11 de abril de 2013  
ISSN: 2007-4530



EPITEMUS: [www.epistemus.uson.mx](http://www.epistemus.uson.mx)



## INTRODUCCIÓN

A pesar de que desde hace mucho tiempo se conoce sobre la aplicación de la mineralogía a los procesos industriales (1), éste y otros aspectos de las rocas mineralizadas han sido resumidos en un ingenioso término acuñado en los últimos años: la geometalurgia (2, 3, 4).

La geometalurgia es una herramienta que integra información geológica, minera, metalúrgica y económica, para maximizar el valor actual neto de una mina, al mismo tiempo que se minimiza el riesgo operativo y técnico (5). Puesto que parte de la geometalurgia consiste en la caracterización de los minerales de mena y ganga, esto enlaza la variabilidad mineralógica y las texturas del depósito con un modelo de bloques en tres dimensiones (3D) y la relaciona con los costos. Lo anterior permite tener en cuenta la variabilidad de la mena en las previsiones de calidad y producción, en el diseño de la infraestructura y en el diagrama de flujo a lo largo de la vida productiva de una mina. La geometalurgia ha tomado gran auge en los últimos años y ha reivindicado a la geología económica en el sentido de que revaloriza su influencia en la ingeniería de procesos. El mayor trabajo de investigación en geometalurgia se hace actualmente en algunas universidades australianas, donde se cuentan numerosas tesis de doctorado sobre este tema, incluyendo el desarrollo de *software* especializado del tipo de *Mineral Liberation Analyzer* (MLA) adaptado al microscopio electrónico de barrido (MEB-EDS).

## BASES DE LA GEOMETALURGIA

La importancia de la geometalurgia basa su principio en la comprensión de que las menas son combinaciones de minerales, no de elementos químicos y, puesto que todos los procesos tratan con minerales, son las características fisicoquímicas de éstos las que determinan las condiciones de un proceso de recuperación industrial. De una manera

más específica, a continuación se mencionan algunas de las bases que sustentan la geometalurgia:

- Las menas son combinaciones de minerales. Son entonces las características de éstos las que determinan las condiciones de los procesos industriales. La determinación y control de procesos basada sólo en una química general puede ser engañosa.

- Los depósitos minerales están formados por más de un tipo de mena.

- Los minerales de ganga son mucho más abundantes que los de mena. Estos minerales pueden determinar, por ellos mismos, condiciones de procesos de minado, quebrado, molienda, flotación, etcétera.

- En algunas menas el metal importante ocurre en más de un mineral. Los minerales tienden a presentar diferente comportamiento durante los procesos; las recuperaciones de un elemento pueden ser diferentes para diferentes minerales. Por otra parte, es el tipo de mineral de mena recuperado el que determina por ejemplo, la ley de un concentrado que alimenta a una fundición.

- No reconocer las aseveraciones previas, implica problemas en los procesos (*i.e.* baja recuperación). De donde las mezclas de menas de diferentes unidades geometalúrgicas, pueden ser la solución adecuada durante la vida de una mina.

- El modelo geometalúrgico es el resultado del conocimiento global del depósito mineral en lo referente a su mineralogía, química, comportamiento a los procesos y recuperación. Esto significa que no deberían ocurrir sorpresas significativas durante la vida de una mina.

## INFORMACIÓN QUE PUEDE APORTAR LA GEOMETALURGIA

Toda la información que se deriva de un estudio geometalúrgico se puede utilizar en procesos relacionados con la evaluación de recursos, los métodos de explotación y



los métodos de beneficio de un mineral. A continuación se mencionan algunas de estas posibilidades de información:

- Relación de especies minerales, características texturales entre ellas, y leyes (Figuras 1 y 2).
- Relaciones entre minerales de mena y ganga.
- Concentración de elementos deseables o indeseables durante un proceso.
- Dureza del material (facilidad de molienda).
- Conocimiento de la mejor malla de liberación de las partículas minerales (Figura 3).
- Recuperación metalúrgica.
- Características de productos de desecho (terreros y jales de plantas de beneficio, escorias y polvos de fundiciones).
- Relaciones de la mena con el consumo de reactivos.
- Facilidades para la perforación durante la explotación o exploración.
- Facilidades para la fragmentación durante la explotación.
- Características de productos de fundición.

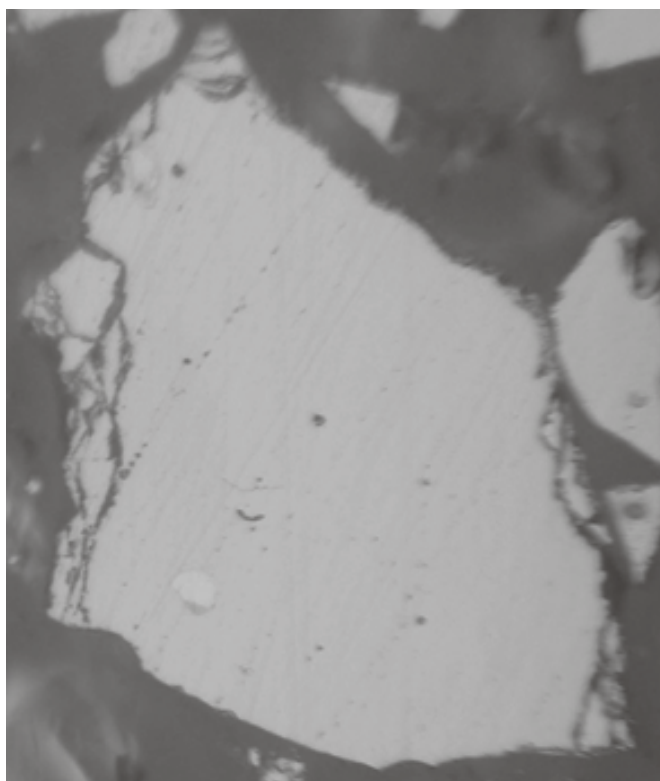


Figura 1. Concentrado de pirita. Fotografía al microscopio minerográfico mostrando la inclusión de un telururo de oro (flecha) en un grano de pirita. El tipo de mineral y su textura, plantea problemas en la recuperación del oro. El grano mide aproximadamente 0.15 mm. Foto: Efrén Pérez Segura.

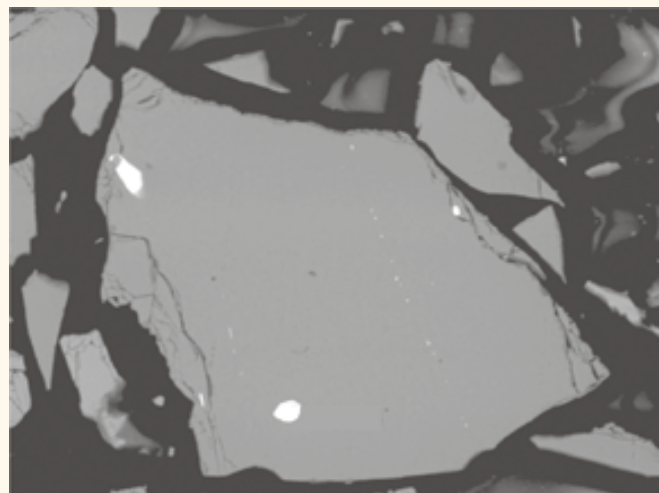


Figura 2. Imagen al microscopio electrónico de barrido (MEB) del mismo grano de pirita de la foto de la figura 1. Se observa la misma inclusión de telururo de oro y otras de la misma composición no observadas al microscopio minerográfico, algunas siguiendo el plano de cruceo de la pirita. La composición del mineral es de Te (66 %) y Au (34 %). Foto y análisis: Francisco Brown.

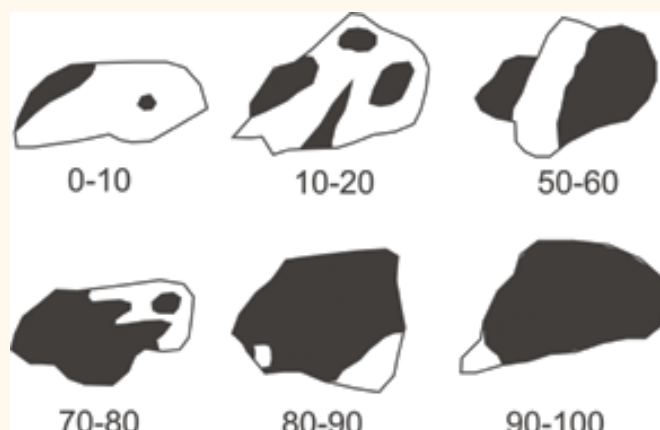


Figura 3. Diferentes grados de liberación de una partícula (negro). Los números representan el por ciento de mineral de interés en la partícula. Figura tomada de Petruk (6), modificada.

### TÉCNICAS DE TRABAJO

Se considera que para la explotación y beneficio de minerales deben definirse unidades metalúrgicas que no forzosamente corresponden a los tipos litológicos o de alteración que se conocen en un yacimiento dado. La definición de una unidad geometalúrgica se debe hacer de común acuerdo entre el geólogo, el ingeniero de minas y el ingeniero metalurgista y depende del tipo de roca, de alteración, de la mineralogía de mena y ganga y de la morfología y texturas minerales. Por su importancia, una

unidad geometalúrgica debe representar por lo menos un 5 o 10% del volumen de recursos económicos explotables. Todos los datos de un estudio geometalúrgico se pueden introducir como variables geoestadísticas en el *software* especializado de las minas conocido genéricamente como “el modelo”. En “el modelo” se fundamenta el plan de minado y las variables geometalúrgicas se pueden traducir en cálculos económicos por bloques, desde antes de que el mineral sea enviado a una planta de beneficio.

Como toda actividad de investigación que trabaja con muestras, lo más importante es la representatividad de la muestra que, en este caso, debe ser extrapolable a decenas o centenas de miles de toneladas de mineral. Por lo tanto, quienes se involucran en un estudio geometalúrgico participan activamente desde la selección y toma de muestras, hasta un reporte final. Las técnicas de trabajo van desde la escala hectométrica hasta la escala microscópica. Una metodología general involucra los siguientes aspectos:

- Cartografía geológica de detalle en el yacimiento (Reconocimiento de litología, tipos y grados de alteración, tipos y grados de mineralización).

- Descripción detallada de núcleos de barrenos de diamante (Reconocimiento de los mismos parámetros anteriores y selección de tramos para muestreo).

- Muestreo de rocas mineralizadas representativas y de tipos de mineral para compósitos (Con el objeto de definir unidades geometalúrgicas y realizar trabajo de detalle al microscopio).

- Estudio de láminas delgadas y secciones pulidas al microscopio polarizante (Definición de las características mineralógicas, litológicas y texturales al microscopio)

- Estudios de difracción de rayos X, principalmente método Rietveld (Composición de minerales específicos, principalmente arcillas y proporciones generales no identificadas al microscopio petrográfico).

- Estudios al microscopio electrónico de barrido (MEB) con EDS (*Energy Dispersive System*) (Composición específica de los minerales y texturas a esta escala).

- Utilización de un programa informático como MLA (*Mineral Liberation Analyzer*) o equivalente, adaptado al MEB-EDS (Programa que permite un conteo automatizado de partículas por composición y cálculo del grado de liberación de las partículas).

- Reconciliación entre composición química global de muestras y fracciones calculadas con base en las composiciones de los minerales específicos y la composición modal (mineralógica) de la muestra.

## POSIBILIDADES DE VINCULACIÓN

La industria minera en México ha jugado un importante papel en el desarrollo nacional y el estado de Sonora se ha consolidado como uno de los estados líderes en producción minera. Por otra parte, la Universidad de Sonora cuenta con personal académico altamente calificado en las áreas de geología económica, ingeniería de minas y metalurgia extractiva. Cuenta también con carreras de licenciatura y de maestría en las mismas áreas y con una infraestructura en laboratorios que incluye microscopía óptica y microscopía electrónica de barrido (MEB-EDS), laboratorios de análisis de minerales y *software* para el modelado minero como el que se usa en las minas en explotación. Considerando que no existen en el país laboratorios de investigación o de servicios que realicen trabajos de geometalurgia, se considera que esta disciplina constituye una excelente oportunidad para realizar trabajo multidisciplinario de vinculación con la industria minera. Para esto es necesaria la conformación de un equipo humano que pueda ofertar a la industria este tipo de servicios altamente especializados. La ventaja de este esquema es que ya se cuenta con personal académico especializado, con estudiantes a nivel licenciatura y maestría para realización de tesis y, lo más importante: no es necesaria la adquisición de infraestructura física, ni mucho menos la conformación de un aparato burocrático nuevo.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Pérez Segura, E. (2003). *Contribuciones de la minerografía a los procesos industriales de recuperación de minerales*, Conferencia de ingreso a la Academia de Ingeniería (AI), México, D.F. 28 p.
- 2) Lamberg, P. (2011). *Particles-the bridge between geology and metallurgy*, Conference in Minerals Engineering, Alatalo, J. (ed), Lulea, 978-91-7439-220-3, p. 1-16.
- 3) Hallewell, M. (2009). *Geometallurgy for mine data*, Materials World, 17 (7), p. 48-50.
- 4) Dobby, G., Bennett, C., Bulled, D. and Kosick, G. (2004). *Geometallurgical modeling – The new approach to plant design and production forecasting/planning, and Mine/Mill Optimization*, Proceedings of 36th Annual Meeting of the Canadian Mineral Processors, January 20-22, 2004. Ottawa, Canada, Paper 15.
- 5) SGS (2013). Recuperado el 01 de Mayo de 2013, de <http://www.sgs.mx/en/Mining/Metallurgy-and-Process-Design/Geometallurgy/Geometallurgy-Framework.aspx>.
- 6) Petruk, W. (2000). *Applied mineralogy in the mining industry*, ELSEVIER, Amsterdam, 268 p.





## DE METEOROS Y METEORITOS

RICARDO VEGA GRANILLO\*

*Un meteorito es un cuerpo extraterrestre que sobrevive a su impacto con la superficie de la Tierra sin ser destruido. Los meteoritos tradicionalmente se han dividido en dos grandes categorías: 1) Meteoritos no-diferenciados o condritas, y 2) Meteoritos diferenciados que incluyen acondritas, meteoritos de hierro y meteoritos de hierro-roca. La gran mayoría de los meteoros se agotan o desintegran por el calor antes de tocar la superficie de la Tierra, pero algunos alcanzan a llegar hasta ella produciendo un meteorito. Los grandes meteoritos pueden golpear a la Tierra con una fuerza considerable, produciendo un cráter de impacto. Los cráteres de impacto conocidos presentan una depresión o hundimiento de forma circular u ovalada. En la Tierra, la mayoría de los cráteres de impacto más antiguos han desaparecido casi en su totalidad debido a la erosión, aunque algunos han sobrevivido. Por los años sesentas, numerosos investigadores, hicieron estudios detallados de los cráteres y aportaron una evidencia clara de que habían sido originados por impactos meteóricos. Se considera que hace unos 65 millones de años, el impacto de un gran meteorito provocó la extinción de más del 75% de plantas y animales terrestres. Se cree que este meteorito cayó en lo que actualmente es la Península de Yucatán formando un cráter de unos 180 km de diámetro. En ese contexto, el estudio y conocimiento de los meteoritos puede ser fundamental para la supervivencia de la especie humana.*

DR. RICARDO VEGA GRANILLO  
Universidad de Sonora, Departamento de Geología  
Correo: rvega@ciencias.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Ricardo Vega Granillo  
Correo electrónico: rvega@ciencias.uson.mx  
Recibido: 25 de febrero de 2013  
Aceptado: 22 de abril de 2013  
ISSN: 2007-4530



EPISTEMUS: [www.epistemus.uson.mx](http://www.epistemus.uson.mx)





## DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS METEORITOS

Un meteorito es un cuerpo extraterrestre que sobrevive a su impacto con la superficie de la Tierra sin ser destruido. Mientras está en el espacio es llamado meteoroide. Cuando entra en la atmósfera, la resistencia del aire causa que la materia del meteorito se caliente y emita luz formando una bola de fuego, también conocida como meteoro o estrella fugaz.

Los meteoritos tradicionalmente se han dividido en dos grandes categorías: 1) Meteoritos no-diferenciados o condritas, y 2) Meteoritos diferenciados que incluyen acondritas, meteoritos de hierro y meteoritos de hierro-roca (1) (Figura 1). Las condritas están formadas por cóndrulos o pequeñas esferas integradas principalmente por silicatos, son muy antiguas y se formaron antes de que existiera el sistema solar, al juntarse polvo y granos de una nebulosa primitiva que originó a los asteroides. Se estima que estas rocas forman un 86% de los meteoritos que han caído en la Tierra. Las acondritas son materiales provenientes de asteroides o planetas en los que ya existía una separación o diferenciación de los elementos químicos y que, en consecuencia, estaban formados por corteza y núcleo. Estos meteoritos más evolucionados forman un 8% de los que han impactado en la Tierra. Los meteoritos de hierro están compuestos en su mayoría por una aleación de hierro-níquel y constituyen el 5% de los meteoritos; y los meteoritos de hierro-roca que contienen cantidades grandes tanto de material rocoso como metálico, son los más raros y sólo constituyen el 1% de los detectados en la Tierra (2). La clasificación más moderna de los meteoritos los divide en grupos de acuerdo a su composición química y mineralógica, así como por su estructura.

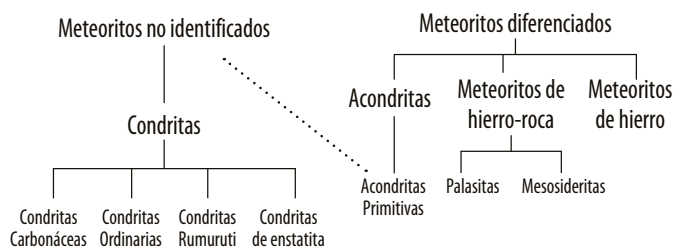


Figura 1. Clasificación primaria de los meteoritos.

## EFFECTOS DE LA CAÍDA DE METEORITOS

La gran mayoría de los meteoros son cuerpos del tamaño de un grano de arena y cuando entran en la atmósfera sus átomos se vaporizan, chocando entre sí y contra los átomos de la atmósfera, produciendo la luz que vemos en las llamadas estrellas fugaces. En cuerpos mayores, como de 10 centímetros a algunos metros, la visibilidad se debe al calor producido por la presión del objeto en los átomos del aire. Este aire comprimido se calienta y entonces



calienta los átomos del meteorito. La gran mayoría de los meteoros se agotan o desintegran por el calor antes de tocar la superficie de la Tierra, pero algunos alcanzan a llegar hasta ella derivando en un meteorito. Esto depende de su tamaño, su estructura y su velocidad. Entre mayor es el tamaño, más probabilidades tendrán de sobrevivir, si tienen una estructura débil se fragmentarán y cada fragmento se desprenderá más fácilmente, pero si son muy veloces, la intensidad del desgaste en la atmósfera será mayor y tenderán a consumirse.

Aproximadamente 500 meteoritos cuyo tamaño varía desde el de un frijol hasta pelotas de basquetbol alcanzan la superficie de la Tierra cada año, y algunos pueden ser mucho mayores. Los grandes meteoritos pueden golpear a la Tierra con una fuerza considerable, produciendo un cráter de impacto. La clase de cráter dependerá del tamaño del meteorito, de su composición y del ángulo de entrada. La fuerza de la colisión de un meteorito puede producir una destrucción amplia. A lo largo de la historia se ha registrado un daño ocasional a viviendas, ganado y aun a personas, como es el caso del meteorito de Cheliabinsk que recientemente explotó y se fragmentó en los cielos de Rusia. En el caso de fragmentos de cometas, los cuales están compuestos principalmente de hielo, puede ocurrir un daño considerable, aunque en ese caso, no sobreviva ningún fragmento del meteorito original. Por ejemplo, en Rusia se produjo un impacto de este tipo en la región de Tunguska.

El evento en Tunguska fue una explosión natural que ocurrió en una región desolada de Siberia en 1908. Se considera que la explosión fue probablemente producida por la onda expansiva de un cometa que explotó entre 6 a 10 km sobre la superficie de la Tierra. La energía de la explosión fue posteriormente estimada como la de una bomba de TNT de 10 a 15 megatonnes (3). Se estima que la explosión causó la caída de 80 millones de árboles en una superficie de 2,150 km<sup>2</sup>. El evento de Tunguska es una demostración histórica de que un evento catastrófico para la humanidad es una posibilidad real.

Los cráteres de impacto conocidos presentan una depresión o hundimiento de forma circular u ovalada. En la Tierra, la mayoría de los cráteres de impacto más antiguos han desaparecido casi en su totalidad, aunque todavía persisten huellas de algunos de ellos. La erosión por el agua y el viento, los depósitos de arena, el suelo transportado por el viento o el agua y los flujos de lava, tienden a oscurecer y ocultar estos cráteres. Por otra parte, en la Luna podemos observar numerosos impactos de meteoros, algunos tan grandes que son visibles a simple vista. Sin embargo, en nuestro planeta aún queda alguna evidencia de los grandes impactos de los cuales se han reconocido alrededor de 183 (*Earth Impact Database, University of New Brunswick*).

Un objeto que cae a la Tierra desde el espacio avanza a una velocidad mínima de unos 12 km cada segundo. Debido a que la energía de un objeto depende de su velocidad, un

objeto muy grande viajando a tal velocidad puede producir explosiones que se parecen a las explosiones nucleares. Los aparatos que detectan las ondas sísmicas registran casi cada año un impacto multikilotón en la Tierra, usualmente dicho impacto ocurre en algún océano.

Cuando el objeto golpea, puede desintegrarse totalmente y los fragmentos, mezclados con los de la roca donde impactó, son arrojados hacia fuera, produciendo el cráter. Fragmentos del impacto y de la roca impactada llegan a derretirse y luego, ya enfriados, pueden encontrarse alrededor de algunos cráteres de impacto en forma de pequeñas bolas de vidrio a las que se les llama tectitas. Partículas del meteorito del tamaño de polvo pueden persistir en la atmósfera por varios meses. Esas partículas pueden afectar el clima, mediante la dispersión de la radiación solar y por reacciones químicas en la atmósfera superior.

### METEORITOS Y SU REGISTRO GEOLÓGICO

Daniel Barringer, que vivió entre 1860 y 1929, fue uno de los primeros en identificar una estructura geológica como un cráter de impacto (4). El cráter estudiado por este investigador se encuentra en Arizona, al sureste de la ciudad de Flagstaff y es llamado "Cráter Meteórico Barringer" o 'Cráter Meteoro'. En su tiempo, sus ideas no fueron muy aceptadas, y cuando lo fueron, no se reconoció el hecho de que los impactos en la Tierra eran comunes

considerando la edad del planeta y su registro geológico.

En 1920 el geólogo americano Walter Bucher estudió numerosos cráteres en los Estados Unidos y concluyó que habían sido creados por grandes eventos explosivos, pero creía que habían resultado de explosiones volcánicas. Sin embargo, los geólogos John Boon y Claude Albritton, que revisaron los estudios de Bucher concluyeron que los cráteres eran probablemente resultado de impactos meteóricos. El asunto permaneció más o menos como una especulación hasta los sesentas, cuando numerosos investigadores, entre los que destaca Eugenio Shoemaker, hicieron estudios detallados de los cráteres y aportaron una evidencia clara de que habían sido originados por impactos, identificando los productos que solamente se asocian con impactos, entre los que destaca la presencia en la superficie de una variedad de sílice llamada coesita, que sólo se produce bajo muy altas presiones (a más de 80 km de profundidad). Aun así, su trabajo fue discutido y atacado, sin embargo, los aterrizajes del Apolo en la Luna, aportaron evidencia de que los numerosos cráteres visibles en ella eran también producto de impactos meteóricos. Debido a que en la Luna los procesos de erosión son mínimos, los cráteres han persistido casi de manera indefinida. Por lo tanto, era de esperarse que la Tierra tuviera al menos la misma proporción de impactos que la Luna, volviéndose claro que nuestro planeta había sufrido muchos más impactos de los que se pueden observar actualmente en su superficie.







## METEORITOS Y EXTINCCIONES MASIVAS

En 1980, un equipo de investigadores dirigidos por el físico Luis Álvarez y su hijo el geólogo Walter Álvarez (5), estudiaban rocas sedimentarias en el límite entre los periodos Cretácico y Terciario (límite KT), el cual se ubica hace unos 65 millones de años. Estos dos periodos dividen dos eras principales de la Tierra: la Mesozoica y la Cenozoica, en la que nos hallamos. La separación de estas eras se basa en un cambio global de los organismos de la Tierra, tanto plantas como animales, incluyendo a los microorganismos marinos. Este cambio está marcado por una extinción masiva de especies. Más del 75% de las plantas y animales perecieron, incluyendo a los dinosaurios.

Álvarez y sus colaboradores encontraron en el límite entre el Cretácico y el Terciario (límite KT) una pequeña capa, como de un centímetro de espesor, con una concentración del elemento Iridio cientos de veces más grande que lo normal (6). Debido a que este elemento es común en muchos asteroides, los investigadores propusieron que esta capa estaba relacionada con el impacto de un asteroide (5). Supusieron que el impacto del asteroide provocó su fragmentación y conversión en polvo, dicho polvo ascendería a la atmósfera y luego caería como una lluvia fina, depositando la capa. A partir de la cantidad de Iridio presente en el límite KT, los investigadores estimaron que un asteroide de 10 a 14 km de diámetro había colisionado con la Tierra. Esas primeras publicaciones impulsaron la investigación en otras partes del mundo. Así, la capa rica en Iridio se ha encontrado en más de cien sitios distintos por todo el mundo. Una prueba más de que esta capa provenía de un impacto es que contiene coesita, forma de silicio creada sólo a enormes presiones.

La explosión que resultó del impacto de tan gran meteoro debió ser cientos de millones de veces más devastadora que la de las armas nucleares más poderosas

que se han explotado. Pudo haber producido un huracán de furia inimaginable y haber lanzado cantidades masivas de polvo y vapor en la atmósfera superior y aún al espacio, formando una tormenta de fuego global, cuando los fragmentos incendiados de la explosión cayeron de regreso a la Tierra. También pudo producir una nube de polvo que envolvió al mundo tapando la luz solar por meses, lo que debió traer como consecuencia una disminución de la fotosíntesis afectando así las cadenas alimenticias, incluso las del fitoplancton marino, de las cuales los dinosaurios eran el último eslabón.

Un problema de la hipótesis de Álvarez y otros (5, 6) fue que no se había encontrado un cráter que coincidiera con ese evento de fines del Mesozoico. En 1978, investigadores que trabajaban para PEMEX, descubrieron mediante estudios geofísicos, una enorme estructura circular de casi 180 km de diámetro (7). La mitad de dicha estructura se encuentra en la parte norte de la Península de Yucatán (Figura 2), la otra mitad debajo del mar y su centro es cercano al poblado de Chicxulub. Los investigadores presentaron un reporte en una conferencia, pero fue poco atendido debido a que Yucatán está formado por rocas relativamente recientes las cuales cubren de forma más o menos horizontal a las rocas más antiguas, por lo tanto, no era posible tener una evidencia directa del impacto meteórico. Por esta razón, los investigadores buscaron muestras de un antiguo barreno de PEMEX y hallaron rocas que exhiben claras evidencias del impacto (8). En 1995 otros profesionistas que estudiaron imágenes de satélite pudieron descubrir una serie de cenotes o hundimientos de las rocas superficiales, que en la superficie seguían el contorno de la estructura a profundidad y consideraron que ocurrieron por el hundimiento de las paredes del cráter (9). Pudo entonces establecerse que el cráter tenía un diámetro total de cerca de 180 km.



Figura 2. Ubicación del impacto meteórico en Chicxulub.



Muchos estudiosos de la vida antigua de la Tierra o paleontólogos están de acuerdo en que un asteroide golpeó al planeta hace unos 65 millones de años, pero muchos no están de acuerdo en que dicho impacto haya sido la única causa de las extinciones. La edad del cráter de Chicxulub se ha establecido en unos 300,000 años antes del límite entre las eras Mesozoica y Cenozoica (10). Este hallazgo sugiere que uno o varios impactos pudieron contribuir, aunque no causar directamente la extinción masiva ocurrida a fines de la Era Mesozoica.

### REFLEXIÓN FINAL

Al principio del nacimiento de la Geología como una ciencia, a mediados del siglo XVII, había una discusión filosófica acerca de la formación de la Tierra. Una hipótesis proponía que se había formado por una serie de grandes catástrofes, mientras que otra proponía que se debía a procesos normales, que actúan hoy y han actuado de igual modo, a través de miles de millones de años, a esta última teoría se le llama Uniformitarismo. Considerando el impacto de grandes meteoritos y el registro geológico, se puede pensar que ambas teorías actúan de manera conjunta. La verdad es que los impactos meteóricos pueden visualizarse desde el punto de vista uniformitarista como algo que ha ocurrido a través de la historia planetaria y seguirá ocurriendo en el futuro, lo que nos obliga a estar prevenidos y ampliar la investigación para preveer posibles impactos.

### BIBLIOGRAFÍA

1) Mason, B. (1967). *Meteorites*. American Scientist, 55: 429–455.

- 2) Dunn, M.G. (Ed.). (1993). *Exploring Your World: The Adventure of Geography*. Washington, D.C.: National Geographic Society.
- 3) Ben-Menahem, A. (1975). *Source parameters of the Siberia explosion of June 30, 1908, from analysis and synthesis of seismic signals at four stations*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, v. 11, 1-35.
- 4) Barringer, D.M. (1906). *Coon Mountain and its Crater*. Proceedings of the Academy of Natural Science of Philadelphia, 57:861-886.
- 5) Álvarez, A., Álvarez, L.W., Asaro, F. y Michel, H.V. (1980). *Extraterrestrial cause for the Cretaceous-Tertiary extinction: Experimental results and theoretical interpretation*. Science, v. 208, p. 1095-1108.
- 6) Álvarez, A., Álvarez, L.W., Asaro, F., y Michel, H.V. (1979). *Anomalous iridium levels at the Cretaceous/Tertiary boundary at Gubbio, Italy: Negative results of tests for a supernova origin*. En Christensen, W.K., y Birkelund, T. (Eds.). Cretaceous/Tertiary Boundary Events Symposium, University of Copenhagen, v. 2, p. 69.
- 7) Penfield, G.T., y Camargo, Z.A. (1981). *Definition of a major igneous zone in the central Yucatan platform with aeromagnetism and gravity*. En Technical program, abstracts and biographies (Society of Exploration Geophysicists 51<sup>st</sup> annual international meeting): Los Angeles, Society of Exploration Geophysicists, p. 37.
- 8) Hildebrand, A.R., Penfield, G.T., Kring, D.A., Pilkington, M., Camargo, A.Z., y Jacobsen, W.V. (1991). *Chicxulub Crater: A possible Cretaceous/Tertiary boundary impact crater on the Yucatan Peninsula, México*, Geology, v. 19, 867-871.
- 9) Perry, E., Marin, L., McClain, J. y Velazquez, G. (1995). *Ring of Cenotes (sinkholes), northwest Yucatan, Mexico: Its hydrogeologic characteristics and possible association with the Chicxulub impact crater*. Geology, v. 23 no. 1, p. 17-20.
- 10) Keller, G., Adatte, T., Stinnesbeck, W., Rebolledo-Vieyra, M., Urrutia Fucugauchi, J., Kramar, U., y Stüben, D. (2004). *Chicxulub impact predates the K-T boundary mass extinction*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 101, no. 11, 3753–3758.



# USOS Y OCURRENCIA DE LOS PRINCIPALES METALES QUE SE PRODUCEN EN SONORA

EVA LOURDES VEGA GRANILLO\*, ALMA PATRICIA SÁMANO TIRADO

*México posee gran cantidad de recursos minerales producto de la naturaleza, por lo que su explotación a través de la minería y el cuidado del medio ambiente deben de coexistir de una manera armoniosa.*

*A través del tiempo la minería ha desempeñado un papel fundamental en la vida económica del país, ya que su desarrollo ha permitido que en la actualidad sea la tercera fuente generadora de ingresos. Asimismo, la minería permite que se desarrollen actividades, como la agrícola y la industrial (automotriz, acerera, cinematográfica, etcétera), entre otras. A nivel mundial, México ocupa el primer lugar en producción de plata, existiendo otros minerales metálicos importantes, como el oro, plomo, hierro, zinc, cobre, uranio y torio.*

*Se considera a la minería como una actividad económica primaria debido a que los minerales se toman directamente de la naturaleza, encontrándose sobre la superficie o bien en el subsuelo a diferentes profundidades. Algunos de los principales centros mineros se localizan al norte del país, pero en los últimos años, Sonora se ha revelado como el estado productor de minerales más importante de México. Los principales minerales son: cobre y metales preciosos, como el oro y la plata. Por ello en el presente artículo, se mencionan los usos más comunes de estos metales, así como su ocurrencia en el estado, y su importancia económica a escala regional.*

M.I. EVA LOURDES VEGA GRANILLO  
 Correo: [eva.vega@ciencias.uson.mx](mailto:eva.vega@ciencias.uson.mx)  
 M.C. ALMA PATRICIA SÁMANO TIRADO  
 Correo: [samano@geologia.uson.mx](mailto:samano@geologia.uson.mx)  
 Universidad de Sonora, Departamento de Geología

\*Autor para correspondencia: Eva Lourdes Vega Granillo  
 Correo electrónico: [eva.vega@ciencias.uson.mx](mailto:eva.vega@ciencias.uson.mx)  
 Recibido: 1 de marzo de 2013  
 Aceptado: 4 de mayo de 2013  
 ISSN: 2007-4530







## USOS DEL ORO Y LA PLATA

El oro (Au) es el metal precioso por excelencia, es de color amarillo, brillante, pesado, maleable y dúctil. No reacciona con la mayoría de los productos químicos, pero sí es sensible al cloro y al agua regia (ácidos nítrico y clorhídrico concentrados). Es considerado por algunas personas como el elemento más bello, es tan dúctil y maleable, de tal forma que una onza (28.35 g) de oro podría formar una sábana de 28 m<sup>2</sup>. También es un excelente conductor del calor y de la electricidad, no le afecta el aire, y se usa principalmente en la acuñación de monedas y en la joyería (1).

La plata (Ag) es un metal de transición de color blanco, es un poco más duro que el oro y, al igual que éste, es brillante, blando, dúctil y maleable. Tiene la más alta conductividad eléctrica y conductividad térmica de todos los metales, pero por su alto precio no se usa en aplicaciones eléctricas. La plata es un mineral escaso en la naturaleza, se le puede hallar como plata pura o formando minerales, principalmente sulfuros (2).

Desde el año IV a.C. el oro fue utilizado en artefactos mortuorios y en adornos como sombreros. En esos tiempos se creía que ingerir alimentos en platos de oro podría prolongar el tiempo de vida y retardar el envejecimiento de las personas. Durante la gran peste negra en Europa algunos alquimistas pensaron en curar enfermos dándoles a tomar oro finamente pulverizado.

El uso de estos metales como adornos es una práctica milenaria, donde el orfebre se dedica a elaborar o crear figuras u objetos decorativos (Figura 1). Al elaborar joyería fina se reconocen tres tipos de oro: el oro alto o de 18 kilates (18 partes de oro por cada 6 de otro metal), oro medio o de 14 kilates (14 partes de oro por 10 de otros metales), y oro bajo o de 10 kilates (10 partes de oro por cada 14 de otros metales). Dependiendo de con qué está aleado, el oro puede tener diferentes colores, pudiendo ser oro amarillo, oro rojo, oro rosa, oro azul, etcétera (3).

Figura 1. Ornamentos aztecas de oro.



Pectoral azteca



Aretes de oro

[http://www.raulybarra.com/notijoya/archivosnotijoya/7/joyeria\\_oro\\_azteca.htm](http://www.raulybarra.com/notijoya/archivosnotijoya/7/joyeria_oro_azteca.htm)

La plata también se usa para acuñar monedas ya que es muy dúctil y maleable, pero un poco más dura que el oro; tiene la más alta conductividad eléctrica de todos los metales, incluso mayor que la del cobre, pero no se usa de forma masiva por su alto precio. Se calcula que alrededor del 70% de la producción de plata se utiliza en la industria (fotográfica, química, médica, y electrónica), quedando el resto para fines monetarios y orfebres. Con la plata se elaboran armas blancas como espadas, lanzas, puntas de flecha, con el yoduro de plata se crea lluvia artificial (Figura 2), se utiliza en aleaciones para piezas dentales, en baterías eléctricas de plata-zinc, etcétera (2).

La plata puede encontrarse en forma nativa o combinada con azufre, arsénico, antimonio o cloro. Se obtiene de minas de cobre, cobre-níquel, oro, plomo y plomo-zinc de México, Canadá, Estados Unidos y Perú, siendo México el mayor productor mundial, habiendo extraído 2,747 toneladas en el año 2000 equivalentes al 15% de la producción mundial de plata.

Figura 2. Usos de la plata.



Espadas de plata-bronce



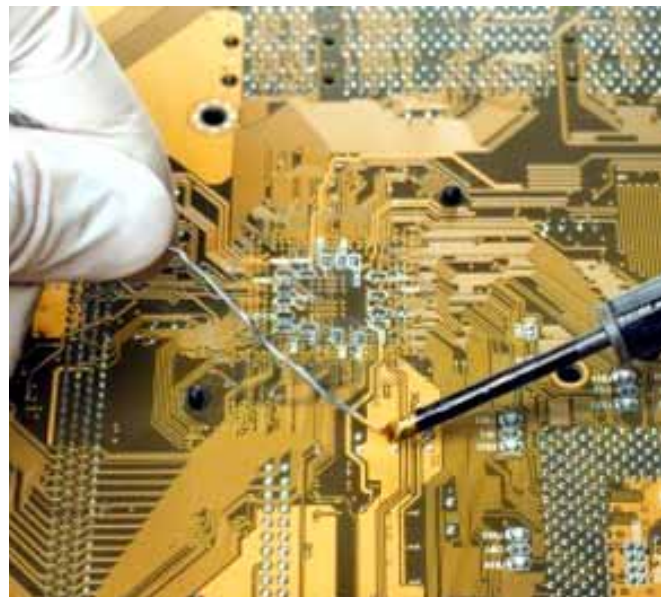
Lluvia artificial con yoduro de plata

<http://www.clarinveracruzano.com/wp-content/uploads/2011/04/lluviaartificial.jpg>

En la antigüedad se creía que el oro y la plata eran regalos de la naturaleza formados por la influencia de la luna y el sol, con propiedades que no tenían otros metales; de aquí se derivan los primeros intentos de los alquimistas de transformar otros metales en oro y plata.

El uso más generalizado del oro es para acuñar monedas (aleado con plata y/o cobre), por su resistencia a la corrosión se usa en la industria, la joyería y la electrónica (Figura 3). Este metal se ha usado desde el inicio de la electrónica en estado sólido, ya que con él se hizo el primer transistor. Casi todos los aparatos electrónicos actuales tienen oro, el que se utiliza en forma masiva principalmente en contactos con chapa de oro y alambres conductores. El uso del oro se prefiere sobre otros materiales por su gran resistencia a la corrosión, porque es muy dúctil, tiene la capacidad de deformarse sin romperse, tiene baja resistencia eléctrica y una elevada conductividad térmica. Aunque su costo es mayor, su uso en pequeñas cantidades es justificable y necesario (4).

Figura 3. Uso del oro en electrónica.



A pesar de que el oro y la plata no son nutrientes para nuestro cuerpo, su uso podría ayudar eliminando toxinas del cuerpo y retardando el envejecimiento de la piel, por ejemplo. Se puede afirmar que el oro no es tóxico aunque puede producir alergias en la piel, y permanece inalterable en los líquidos biológicos como la sangre.

Un uso exótico que se le está dando en nuestros días a estos metales es como ingredientes de lujo en platillos, tanto en spray como en láminas o polvos, logrando presentar la comida de una manera sorpresiva y sofisticada (Figura 4). La Unión Europea considera como aditivos alimentarios autorizados y permite el uso en alimentos de algunos metales, como el oro, la plata, el titanio y el aluminio (5).



Figura 4. El oro y la plata en alimentos.



Pan de dulce con plata

<http://rvfconsultores.blogspot.mx/2011/07/tendencias-alimentos-banados-en-oro-y.html>



Tomates con oro



Oro en vino

Aunque la plata no es tóxica, la mayoría de sus sales son venenosas y pueden ser carcinógenas, sus compuestos pueden ser absorbidos por el sistema circulatorio, depositarse en diversos tejidos y provocar argirismo (coloración grisácea de la piel y mucosas que no es dañina pero sí antiestética). Los efectos de la plata en la salud no se conocen; desde tiempos de Hipócrates se sabe de su efecto germicida y se comercializan hoy en día remedios para una gran variedad de dolencias pero no hay estudios clínicos que demuestren su utilidad como antibiótico (2).

## USOS DEL COBRE

El cobre (Cu) es un metal de transición de color rojizo y brillo metálico, que junto con el oro y la plata forman la llamada "familia del cobre". Después de la plata, es uno de los mejores conductores de electricidad. Debido a su alta conductividad eléctrica, y ya que es muy dúctil y maleable, es el material más usado para fabricar cables eléctricos, así como componentes eléctricos y electrónicos.

Se halla en una gran cantidad de alimentos como ostras, mariscos, carne, nueces y en el agua potable, por ello, es casi imposible que carezcamos de ese metal (Figura 5). El Cu actúa, junto a la vitamina C, en la formación de colágeno de tejidos conectivos y de hueso.

López y otros (6) analizaron la concentración de zinc, fierro y cobre en alimentos de consumo frecuente en México (104 de origen vegetal y 32 de origen animal); el cobre no fue hallado en todos los alimentos, siendo la máxima concentración reportada de 3.37 mg/100 g en muestra de hígado de res.

Figura 5. El cobre está contenido en diversos alimentos.



El cobre se usa en aleaciones que en general tienen menor conductividad eléctrica, como bronce (Cu-Sn), alpaca (Cu-Ni-Zn) y latón (Cu-Zn), entre otras. Fue uno de los primeros metales, junto con el bronce usados por el hombre, tanto que en la historia a esas épocas se les conoce como Edad del Cobre y Edad del Bronce. Ha servido para hacer utensilios, motivos ornamentales, puntas de flecha, herramientas, armas, en la construcción, objetos decorativos, etcétera (Figura 6).

Figura 6. Usos del cobre.



Utensilios



Herramientas





El desarrollo de numerosos equipos eléctricos usando Cu, tales como generadores, motores y transformadores, le ha dado una importancia destacada en la humanidad y ha aumentado su demanda grandemente. La aleación con otros metales posterior a la revolución industrial también aumentó su uso.

El Cu es el material más usado para fabricar cables eléctricos, tanto para la industria como en los hogares. También se utiliza en los cables telefónicos, que son la base para la comunicación por Internet. Su uso incide asimismo, en los medios de transporte (radiador, frenos, cojines, cables, motores eléctricos, etcétera), elaboración de monedas, maquinaria, e instrumentos musicales, entre otros.

### OCURRENCIA EN SONORA

La geología y tectónica de Sonora permitieron el emplazamiento de ricos cuerpos minerales, cuya explotación lo ha colocado como uno de los estados mineros más importantes de México. Al ser la minería una actividad primaria, permitió el asentamiento de ciudades en la antigüedad y sentó las bases del Sonora moderno. En este contexto, la producción de minerales metálicos y no metálicos pone al estado como líder nacional, constituyendo importantes fuentes de empleo y otros ingresos económicos. Por ejemplo, Sonora es líder nacional en la producción de cobre de las minas de Cananea y Nacozari, así como de oro de dos minas de clase mundial ubicadas en los municipios de Caborca y Sahuaripa (7) (Figura 7).

Figura 7. Minas de cobre y oro en Sonora.



Espectacular tajo de Cananea, principal mina de cobre de México

<http://www.guiarte.com/fotos-usuarios/20011.html>



Tajo de la mina de cobre de Nacozari, la segunda en importancia del país

<http://www.grupo-vysisa.mx>



Panorámica de la mina de oro La Herradura en el Mpio. de Caborca

[http://farm4.staticflickr.com/3207/3087833491\\_d3f3b77eca.jpg](http://farm4.staticflickr.com/3207/3087833491_d3f3b77eca.jpg)



Mina de oro Mulatos, Mpio. de Sahuaripa

<http://www.insetecmexico.com/portaI2/notacompleta.php?id=361>



Lo que extraen las minas de Sonora al año equivale a alrededor del 50% de la producción nacional y se calcula que es más de 31,500 millones de pesos. Esta producción incluye el 84.0% del total de cobre y el 28.6% del total de oro producidos en México, por citar algunos de los minerales más importantes.

La economía de algunos municipios como Nacozari, Cananea, La Colorada, Cumpas, Sahuaripa, Álamos, Caborca, Altar, Trincheras, Santa Ana, Magdalena, entre otros, está basada en gran parte en la minería. Esta rama establecida da empleos directos a más de 13,000 personas, o sea, más del 2% de los empleos disponibles, cuyos sueldos suman alrededor de 1,500 millones de pesos al año, agregándole que los trabajadores mineros son de los mejor remunerados (7).

La riqueza minera, el dinamismo del precio de los metales, una política laboral estable y un gobierno que apoya la llegada de nuevas compañías, hacen que la minería se desarrolle de manera notable en Sonora. Actualmente, el estado produce el 32.3% de la producción minera del país; es líder en la extracción de oro (31.1% del total), de cobre (79%), y de plata junto con Zacatecas, Chihuahua y Durango (79% del total). En cuanto a minerales no metálicos, Sonora aporta el 100% de la producción de molibdeno, grafito, carbón antracítico, wollastonita y molibdeno (8).

## AÑOS RECIENTES DE LA MINERÍA

Por todos es conocido que Sonora es un estado

tradicionalmente minero, pero a principios de la década de los noventa, hubo un auge por buscar yacimientos de oro, ya no las pequeñas vetas de alta ley, sino todo lo contrario: depósitos de gran volumen aunque de baja ley. Este auge incentivó la llegada de grandes empresas mineras, sobretodo canadienses y norteamericanas, que se enfocaron en desarrollar las minas de La Colorada, Santa Gertrudis, Amelia, La Choya, Lluvia de Oro, El Boludo, San Francisco y La Herradura, algunas de ellas agotadas en la actualidad (Figura 8).

En años recientes se han evaluado distintos proyectos mineros, entre los que se destaca la búsqueda del oro de Mulatos y El Chanate, del cobre de Mariquita, Milpillitas, Luz del Cobre y Piedras Verdes, de la plata de Álamo Dorado, y del molibdeno del Crestón (9).

A manera de conclusión se puede decir que, a la destacada producción de cobre en Sonora, se le ha sumado en los últimos diez años, la extracción de minerales metálicos como oro, plata, molibdeno, y la de no metálicos como wollastonita y carbón antracítico. Por ejemplo, respecto al oro, el territorio estatal es en este momento el principal productor nacional, y en cuanto a plata, mantiene volúmenes de producción importantes gracias a la fundición y refinación del complejo minero La Caridad. Las exploraciones geológicas reportan la existencia de otros yacimientos poco o nada explotados de wollastonita, zeolita, perlita, talco, arcilla, mica, carbonato de sodio, borato, mármol, travertino y feldespato, así como de rocas utilizadas en la industria de la construcción, como canteras, calizas, puzolana y morusa (7).



Figura 8. Principales minas de Sonora.



Todo este auge minero ha producido a su vez, la llegada de varios cientos de profesionistas de las geociencias e incrementado la matrícula en las carreras y posgrados de geología, minería y metalurgia del estado.

### COMENTARIO FINAL

Sonora es reconocido por sus diversas actividades económicas: agricultura, ganadería, industria, pesca y minería, siendo esta última proveedora de materia prima para la elaboración de productos industriales. Los minerales que se producen en Sonora y los extraídos en otros lugares del país a través de la historia, le han permitido al hombre tener un mejor nivel de vida, ya que sus usos tan variados, le han servido para comer, adornarse, sobrevivir, luchar, y en general, progresar en muchos aspectos vitales.

Por todo ello, se considera importante no sólo conocer la ocurrencia y utilidad de los minerales producidos en Sonora, sino también cuantificar dichos recursos.

### BIBLIOGRAFÍA

- 1) Enciclopedia Libre Universal en Español (2013). *Oro*. Recuperado el 10 de Marzo de 2013, de <http://es.wikipedia.org/wiki/Oro>
- 2) Enciclopedia Libre Universal en Español (2013). *Plata (elemento químico)*. Recuperado el 12 de Marzo de 2013, de [http://enciclopedia.us.es/index.php/Plata\\_\(elemento\\_qu%C3%ADmico\)](http://enciclopedia.us.es/index.php/Plata_(elemento_qu%C3%ADmico))

- 3) LingOro.com (2013). *¿De dónde sale el oro y para qué se usa?* Recuperado el 04 de Abril de 2013, de <http://www.lingoro.info/monedas-de-oro/%C2%BFde-donde-sale-el-oro-y-para-que-se-usa/997/>
- 4) Construyendo diálogo, el blog para hablar de minería (2013). *El uso del oro en los aparatos electrónicos*. Recuperado el 15 de Enero de 2013, de <http://www.construyendodialogo.com/2011/11/15/el-uso-del-oro-en-los-aparatos-electronicos-angel-abusleme/>
- 5) Rvf Consultores (2013). *Alimentos bañados en oro y plata*. Recuperado el 22 de Febrero de 2013, de <http://rvfconsultores.blogspot.mx/2011/07/tendencias-alimentos-bañados-en-oro-y.html>
- 6) López, P., Castañeda, M., López, G., Muñoz, E., Rosado, J. (1999). *Contenido de hierro, zinc y cobre en los alimentos de mayor consumo en México*. Arch. Latinoam. Nutr. 49(3): 287-294.
- 7) Blog de WordPress.com: "Cd. Obregón en Sonora" (2013). *SONORA.- Principal productor minero de México*. Recuperado el 05 de Marzo de 2013, de <http://obson.wordpress.com/2009/04/18/sonora-principal-productor-minero-de-mexico/>
- 8) Revista Mundo Minero (2013). *Sonora, líder en minería en el país*. Recuperado el 07 de Febrero de 2013, de <http://www.insetecmexico.com/porta12/notacompleta.php?id=1019>
- 9) Servicio Geológico Mexicano (2011). *Panorama minero del estado de Sonora*. Secretaría de Economía. México. 80 p.







## ANIVERSARIOS ASTRONÓMICOS EN CANANEA, SONORA

RAÚL PÉREZ - ENRÍQUEZ\*

*El 21 de marzo de 1913, en la ciudad de México, nació Guillermo Haro Barraza y el 27 de abril de 1988, se inauguró el Observatorio Astrofísico Guillermo Haro, en Cananea, Sonora. Estos dos muy importantes aniversarios astronómicos se conmemoraron el pasado 27 de abril. Aquí se da cuenta de la relevancia de ambos festejos, de la fructuosa vida del homenajeado y de las actividades desarrolladas ese día allá donde está instalada "Una mina de estrellas".*

DR. RAÚL PÉREZ-ENRÍQUEZ  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: rpereze@correo.fisica.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Raúl Pérez Enríquez  
Correo electrónico: rpereze@correo.fisica.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado: 7 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN

Fue una fresca mañana la que nos recibió en Cananea, la cual no podía ser más propicia para conmemorar dos importantes aniversarios en el campo de la Astronomía de nue se celebraron. Por un lado, las brillantes mañanas de abril, cuando la duración del día comienza a crecer, tienen aires de frescura que aún se dejan sentir; por el otro, los jardines de la "Casa Green" muy cercana a la Sierra de la Mariquita, donde se asienta el telescopio de 2.1 m, en el centro de la entrañablemente sonorense ciudad de Cananea, eran el ambiente y marco de los festejos. Ahí, desde donde se abre una ventana hacia el resto del universo observable, nos recibieron los directivos encabezados por el director, investigadores y trabajadores del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) para homenajear a Guillermo Haro y uno de los frutos de su obra, el Observatorio Astrofísico que lleva su nombre.

En efecto, los dos aniversarios a los que hacemos referencia son: El centenario del natalicio de Guillermo Haro Barraza y, los 25 años del Observatorio Astrofísico Guillermo Haro (OAGH). El primero, recordado por el Ing. César Arteaga Magaña quien acompañara al Dr. Haro en las etapas de la construcción; el segundo, entrelazado con el primero haciendo énfasis en la entrega de reconocimientos a quienes han vivido ya más de 20 años bajo el techo del OAGH.

## EL ASTRÓNOMO GUILLERMO HARO

Hace cien años, el 21 de marzo, en un barrio la Ciudad de México nació quien llegaría a ser, si no el más importante astrónomo de México, sí uno de sus máximos exponentes. En el seno y con el apoyo de la familia Haro-Barraza, Guillermo avanzaría en sus estudios de leyes en la UNAM, pero alcanzaría un doctorado en la que significaría su pasión al descubrirlo, la Astronomía. Después de pasar una buena parte de su vida en el Observatorio Astrofísico Nacional de Tonantzintla (OANTON), viajó a muchos observatorios, llegando incluso al de la Universidad de Harvard. Agudo investigador se le reconoce mundialmente por múltiples trabajos pero muy especialmente por el descubrimiento de los objetos, que en su honor y de un colega, llevan el nombre de objetos Haro-Herbig (o HH). Sería largo enumerar otras contribuciones del Dr. Haro al desarrollo de la ciencia en México; sin embargo, es importante destacar que se inició en la astronomía como ayudante



en el OANTON que vendría a convertirse en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), referente nacional de cara a la Astrofísica Internacional. Cabe recordar que al fundador del dicho observatorio Luis Enrique Erro, le siguió el Dr. Guillermo Haro quien junto al Prof. Luis Rivera Terrazas, el Dr. Luis Munch y el astrónomo Enrique Chavira, se encontraría entre los científicos más destacados de su época. Hacia fines del año 1954, este último y el homenajeados descubrieron un cometa que se conoció como Cometa Haro-Chavira. En 1953, Guillermo Haro recibió la Medalla de Oro "Luis G. León" de la Sociedad Astronómica Mexicana; y, en 1962, la Medalla Honorífica de la Academia de Ciencias de Armenia; todo ello sólo para recordar algunas de sus muchas distinciones. Tan solo un año después de recibir la medalla, el Dr. Haro se hizo merecedor del Premio Nacional de Ciencias. Falleció un 27 de abril, pero de 1988 en la misma ciudad que lo vio nacer (1).

Quisiéramos describir los rasgos de su compromiso con el conocimiento y con México, basta para ello, recordar algunas de las expresiones que por los años 50's expresaba el Dr. Haro cuando recibía reconocimiento como miembro del "Colegio Nacional"; y que muestra su espíritu de búsqueda, sus virtudes, que lo harían emprender los proyectos como el que este observatorio representa; son

frases tomadas de su discurso inaugural denominado "En el cielo y en la Tierra"<sup>(2)</sup>:

"...Se dice que las ciencias florecen sólo en el seno de los pueblos industrializados y ricos, y que nosotros somos pobres y aún usamos el arado egipcio. Mas los pueblos ahora prósperos fueron ayer atrasados y pobres y, sin embargo, en ellos brotó un poderoso movimiento científico y tecnológico creador de riqueza, de bienestar, de dinamismo y poderío, y también - por qué no decirlo- de abuso y catástrofe".

"Al dirigirnos al cielo, a ese cielo formado de la misma materia que el astrónomo, pensamos en la unidad de la física de nuestro universo y en la necesidad de entendimiento, de colaboración y de paz que deben reinar entre los hombres".

"La ciencia, desde luego, no es panacea que resuelva todos los problemas ni conteste todas las preguntas... El hombre de ciencia tiene que ser consciente de las preguntas que no debe hacer, y sobre todo, de las respuestas que no puede esperar...".

No cabe duda de que su entrega era a la ciencia pero sobre todo a la humanidad.



## EL OBSERVATORIO ASTROFÍSICO GUILLERMO HARO

En las palabras que acabamos de reproducir se ven reflejados los rasgos propios de quien habría de apoyar decididamente la construcción del Observatorio Astrofísico de Cananea, conocido ahora como Observatorio Astrofísico Guillermo Haro (Figura 1). Con la instalación, en la cima de la Sierra “La Mariquita”, de un telescopio de 2.12 m de longitud, a una altitud 2,480 m sobre el nivel del mar, nuestro país se incorporó de lleno a la investigación de frontera de la Astronomía y Astrofísica de aquel tiempo, 1988. Este telescopio que ha visto pasar por su plataforma levadiza primero y por su centro de control después, a innumerables e importantes astrónomos y astrofísicos de México y del resto del mundo, ha permitido la observación de fenómenos estelares relevantes.

La operación del telescopio ha venido mejorando paulatinamente. Con la instalación del espectrógrafo alemán LFOC, en 1991, empezó la etapa de observación de objetos ROSAT, fuentes de Rayos X. Posteriormente, se instaló el espectrógrafo Boller & Chivens y, más recientemente, en 2002, se puso en operación la cámara CANICA basada en imagen infrarroja de área ancha con HgCdTe de Rockwell (HAWAII por sus siglas en inglés). Así, el observatorio ha ido evolucionando, de manera que se mantiene en la frontera. Hoy, el telescopio está incorporado a la familia de instrumentos con visión mejorada del cercano infrarrojo. De hace un par de años a la fecha, la presencia del espectrógrafo de fibras ópticas Eber-Fastie ha llevado a lograr imágenes de ultra alta resolución con lo que la vida útil del telescopio se ve alargada (3).



figura 1. Observatorio Astrofísico Guillermo Haro, en Cananea, Sonora.

Debemos destacar el papel relevante y simbólico de la antigua «Casa Greene», en Avenida Sinaloa No. 25 de Cananea, Sonora, sede administrativa del OAGH, en donde se hicieron los festejos que aquí se relatan; la casa ha

tenido un papel muy importante en la vida de este centro de investigación. Esta edificación es la que guarda entre sus tablonés y barandas, techos y ventanas, la historia y datos del observatorio y ha dado hospedaje a los visitantes y astrónomos todos estos años (4).

## LOS FESTEJOS

En los jardines de esta simbólica casa, a manera de área de exposiciones, se instalaron demostraciones de los productos que ofrece el INAOE, telescopios por los cuales los asistentes pudieron ver el Sol, durante el día; y la mina de la que hablaba el Dr. Haro por la noche. También, se pudieron observar experimentos de ciencias realizados por estudiantes del Instituto Minerva; y la muestra de carteles y dibujos elaborados por estudiantes de las categorías Nova y Supernova que respondieron de manera entusiasta a la convocatoria “Cananea, una mina de estrellas”.

La UNISON, también, tuvo presencia con exposiciones y talleres. Por cierto, se montaron mesas de trabajo en las cuales niños, jóvenes y adultos podían armar modelos de la Luna, o del Gran Telescopio Milimétrico, maqueta esta última del gran proyecto que en unos meses estará en pleno funcionamiento en la cima del volcán Sierra Negra, muy cerca del Pico de Orizaba, en Puebla.

Para completar y cerrar con broche de oro la ceremonia conmemorativa de los aniversarios astronómicos, se presentaron dos cantantes sonorenses quienes interpretaron piezas de Giuseppe Verdi por celebrar su bicentenario de nacimiento, así como piezas de autores mexicanos. Las voces de la soprano Nadia Lamadrid y del tenor Adrián Lozano emocionaron a los asistentes al seguir los acordes del pianista Jaime Verdugo que los acompañó.

Viandas y aguas frescas cerraron los festejos de medio día, pero la celebración, con la observación nocturna y convivencia, habrían de rematar los aniversarios.

La sociedad sonorensis no puede dejar de conocer sobre estos aniversarios pues representan una de las muchas vetas que dan riqueza a la vida de nuestro estado.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) El Colegio Nacional (2007). *Vida y Obra de Guillermo Haro Barraza*. Recuperado el 05 de Mayo de 2013, de <http://www.colegionacional.org.mx/SACSCMS/XStatic/colegionacional/template/content.aspx?se=vida&te=detallemiembro&mi=172>
- 2) Haro, G. (1953). *En el Cielo y en la Tierra. Discurso de Ingreso al Colegio Nacional*. Recuperado el 05 de Mayo de 2013, de <http://www.colegionacional.org.mx/SACSCMS/XStatic/colegionacional/template/pdf/1953/10%20-%20Toma%20de%20posesion%20de%20nuevos%20Miembros%20Titulares%20del%20Colegio%20Nacional.pdf>
- 3) Perez-Enriquez, R. (1998). *Cometa Hyakutake: Una práctica de Campo*. Aleph Zero 17, Recuperado el 05 de Mayo de 2013, de <http://www.comprendamos.org/az/alephzero/azhemeroteca.html>
- 4) INAOE (2012). *Observatorio Astrofísico Guillermo Haro*. Recuperado el 05 de Mayo de 2013, de <http://astro.inaoep.mx/observatorios/cananea/>





# EL ASTRÓNOMO

RICARDO RODRÍGUEZ MIJANGOS\*

**En memoria de Antonio Sánchez**

DR. RICARDO RODRIGUEZ MIJANGOS  
Universidad de Sonora, Departamento de Física  
Correo: mijangos@cifus.uson.mx

\*Autor para correspondencia: Ricardo Rodríguez Mijangos  
Correo electrónico: mijangos@cifus.uson.mx  
Recibido: 12 de marzo de 2013  
Aceptado 1 de mayo de 2013  
ISSN: 2007-4530



Ya estaba por llegar al observatorio. Su rostro denotaba cansancio pero sus ojos proyectaban una rara mirada pues casi no había dormido por la excitación. La noche anterior estando en la cúpula de observación astronómica había avistado una nueva luz en el cielo, el cual conocía como la palma de su mano. Tantos años de contemplación le daban el conocimiento de la colocación en el firmamento de las miríadas de lucecitas estelares, según el paso de las estaciones del año.

Había soñado repetidas veces que en la negrura aterciopelada de la noche una nueva luz se prendía en la bóveda celeste, había sido sorprendente para él visualizar en la límpida oscuridad de la noche anterior, totalmente despejada de nubes, la luz oteada en sus sueños: era como surgida de una intensa hoguera. Sabiendo hacia dónde mirar, la podía avistar casi sin esfuerzo, capacidad que le era muy útil para su ocupación de astrónomo. Caminando apresuradamente al observatorio pasó por la hilera de estatuas yacentes y tuvo la impresión de que en lugar de estar mirando hacia el horizonte lejano, todas miraran hacia el infinito en dirección a la novel llama.

Al llegar a las empinadas escaleras de piedra que llevaban a la entrada del observatorio, subió presuroso para ingresar a la edificación. Ascendiendo las escaleras de caracol llegó a su amado lugar de trabajo, la cúpula del observatorio.

Ansiosamente esperó Ya casi iba ser el momento en que en la ventana de observación quedara encuadrado el

nuevo fulgor que viera la noche anterior. Sería la prueba concluyente que su visión no había sido una continuación de sus sueños. Detectarla en el momento esperado significaba que realmente estaba colocado en un lugar del espacio en que anteriormente solo había tinieblas, entonces podría dar la buena nueva de que el nuevo resplandor prometía beneficiosos augurios para la ciudad.

Aguzó la vista y se le aceleró el corazón cuando el resplandor esperado apareció, ya tenía una mayor certeza de que la nueva estrella iba permanecer para siempre e imaginó a su joven ayudante observándola, cuando fuera viejo como él ahora y aun después cuando ya hubiera tomado el camino a Xibalba bé. Incluso varias generaciones después la seguirían observando y recordarían a quien tuvo la fortuna de avistarla cuando esta nueva hoguera celeste o Tzab-ek se había encendido. Lo recordarían a él.

Pasó mucho tiempo en el observatorio dónde fue percibida una nueva Tzab-ek y aquella ciudad, a la que nuevos hombres llamaron Chichen Itzá, quedó olvidada, también el astrónomo fue olvidado como individuo. Sin embargo los nuevos astrónomos reconocieron a sus análogos como representantes de una esplendorosa civilización que escogió escurrirse silenciosamente por las rendijas de la historia, dejando muchos enigmas para la posteridad: En la época presente se puede suponer que el astrónomo Maya pudo haber observado la extinción de una estrella no visible hoy pero que al morir en aquellos tiempos, habría refulgido con gran luminosidad.





"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

# Universidad de Sonora

## UNIDAD REGIONAL CENTRO

### DIVISIÓN DE INGENIERÍA

## Posgrados incluidos en el Padrón Nacional de Posgrados de Calidad de CONACYT

### Programa de Doctorado y Maestría en Ciencia de Materiales

#### Objetivos del Programa

El objetivo general del programa es formar personal de alto nivel académico y con autonomía para llevar a cabo en forma eficiente las actividades de generación, aplicación y difusión de conocimiento de frontera en el área de Ciencia de Materiales.

Los objetivos específicos son contribuir a la formación de los recursos humanos especializados que el país requiere en Ciencia de Materiales. Desarrollar investigación de alto nivel comprobada a partir de publicaciones científicas de calidad. Participar de manera efectiva en la resolución de problemas tecnológicos que se presenten en el medio social y productivo de la región y el país, en el ámbito de las líneas de investigación del programa.

### Programa de Doctorado y Maestría en Ciencias de la Ingeniería: Ingeniería Química

#### Objetivos del Programa

Formar académicos y profesionales del más alto nivel en ingeniería y sus campos afines, útiles a la sociedad. Promover la práctica profesional de calidad en ingeniería y campos afines. Contribuir a la solución de problemas nacionales. Realizar investigación para generar nuevos conocimientos, métodos y criterios en ingeniería y sus campos afines. Desarrollar tecnología.

### Programa de Posgrado en Ingeniería Industrial

#### Objetivos del Programa

El objetivo general es formar recurso humano orientado a entender, analizar y resolver problemas complejos dentro de organizaciones dedicadas a la producción de bienes o servicios.

Los objetivos específicos son profundizar en el estudio de áreas de interés de la Ingeniería Industrial, acorde a las necesidades que se deseen resolver por parte de la institución y de la sociedad. Hacer énfasis en la aplicación del conocimiento y la tecnología para resolver problemas que afectan la calidad y productividad de las organizaciones que producen bienes o prestan servicios. Impulsar la mejora de la eficiencia y eficacia de las organizaciones sobre todo aquellas consideradas como pequeñas y medianas (PYMES) que permita impulsar el desarrollo del estado y del país.

### Programa de Posgrado en Ciencias de la Ingeniería: Ingeniería Civil

#### Objetivos del Programa

El objetivo general del programa es formar personal del más alto nivel académico y profesional en el campo de la Construcción y la Valuación, capaz de realizar investigación para generar nuevos conocimientos o desarrollos que contribuyan a la solución de problemas de interés regional y nacional.

### Programa de Especialidad en Desarrollo Sustentable

#### Objetivos del Programa

Formar profesionales con una perspectiva integral de las áreas técnica, administrativa, económica, social, ambiental y ética de acuerdo a los modelos modernos del desarrollo

### Programa de Maestría en Sustentabilidad

#### Objetivos del Programa

El objetivo general del programa de maestría es coadyuvar con la sociedad en la transición hacia estilos de vida más sustentables, mediante la formación de profesionistas con una perspectiva holística y ética; con los conocimientos y habilidades para planear, implantar y evaluar intervenciones que conlleven a prevenir, eliminar y/o reducir los riesgos e impactos ambientales y ocupacionales en el área de su profesión y/o desarrollo en beneficio de su comunidad.



<http://www.investigacion.uson.mx/programas-posgrado.htm>

**UNIVERSIDAD DE SONORA**

Rosales y Blvd. Luis, Edificio 5B, Hermosillo, Sonora, México, C.P. 83000, Tel: (662) 259-21-06, 07 y Fax: 259-21-05





"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

# Universidad de Sonora

## UNIDAD REGIONAL CENTRO

### DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

## Posgrados incluidos en el Padrón Nacional de Posgrados de Calidad de CONACYT

#### PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS

##### Objetivos del Programa

Formar personal con alto nivel académico, para el estudio autónomo y comprensión de los resultados y avances de la matemática moderna y sus aplicaciones, con capacidad para realizar labores de asesoría y apoyo matemático en proyectos de investigación y desarrollo en disciplinas de carácter científico y tecnológico. A nivel de doctorado, además de los anteriores, el objetivo principal es capacitar para la realización de investigación original e independiente en el campo de las matemáticas y sus aplicaciones.

#### PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

##### Objetivos del Programa

El propósito de este programa académico es formar Especialistas en Matemática Educativa, cuya práctica profesional como docentes sintetice una serie de competencias éticas, ideológicas, de conocimiento teórico y sentido práctico, para atender los problemas de la educación matemática escolar en los ámbitos de la investigación, el desarrollo docente y la proyección social de sus egresados.

#### PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN FÍSICA

##### Objetivos del Programa

Preparar personal con un profundo conocimiento de las leyes fundamentales de la Física, para ejercer labores docentes a nivel licenciatura, posgrado y especialidad. Capacitar personal para ejercer actividades asociadas a la generación de conocimiento en diferentes áreas de la Física. Formar personal con una alta capacidad de trabajo e innovación lo cual le permita incidir sobre la solución de aquellos problemas de su competencia relacionados con el sector productivo de la región y del país. Capacitar personal en la utilización eficiente de diverso equipo con un alto desarrollo científico y tecnológico. Desarrollar programas multidisciplinarios de investigación científica y tecnológica.

#### PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS GEOLOGÍA

##### Objetivos del Programa

El objetivo general es el de formar Maestros en Ciencias de alto nivel de calidad y excelencia, capaces de participar en el análisis y solución de problemas geológicos tradicionales y de frontera, utilizando el método científico, y respondiendo con oportunidad a las necesidades del desarrollo científico y tecnológico del país. Se ofrece un espacio de formación de alto nivel académico en torno a la problemática derivada de tres grandes áreas de aplicación de las Ciencias de la Tierra como son: los yacimientos minerales, la geología regional, y la hidrogeología-geología ambiental. Con ello se pretende contribuir al fortalecimiento de la capacidad profesional y/o investigativa de los profesionales que se desempeñan en estas áreas del conocimiento.



[http://www.investigacion.uson.  
mx/programas-posgrado.htm](http://www.investigacion.uson.mx/programas-posgrado.htm)

**UNIVERSIDAD DE SONORA**

Rosales y Blvd. Luis, Edificio 5B, Hermosillo, Sonora, México, C.P. 83000, Tel: (662) 259-21-06, 07 y Fax: 259-21-05